§ 7. Движение несвободной материальной точки

7.1. Понятие связей. При анализе понятия механической силы был рассмотрен случай, в котором действие на материальную точку всех остальных точек системы описано как сила, являющаяся функцией координат, скорости и времени. В этом случае точку принято называть *свободной.* Однако при практическом применении уравнения движения (6.1) часто встречаются системы, в которых, кроме изучаемой движущейся материальной точки, имеются движущиеся или неподвижные тела конечных размеров, участвующие во взаимодействии. В принципе их действие на рассматриваемую точку также сводится к силам, возникающим при соприкосновении,— это силы упругости, трения. Но задать их заранее до решения задачи о движении точки практически невозможно. Проще рассмотреть те очевидные ограничения, которые накладывают указанные тела на движение точки, на ее траекторию, скорость.

Материальная точка называется *несвободной,* если ее движение ограничено какими-либо дополнительными условиями; уравнения, выражающие эти условия, называются *уравнениями связей,* или просто связями. Материально связи осуществляются при помощи различных направляющих: рельсов, нитей, стержней и т. д. Независимо от конкретного устройства связи последняя позволяет точке перемещаться по некоторой поверхности или линии, а в самом общем случае налагает ограничения на скорость движения точки.

В механике не учитывают конструктивные особенности связей и классифицируют их по виду аналитических выражений, которыми они задаются. Геометрически уравнения связей представляют уравнения поверхностей или областей пространства, ограниченных некоторыми поверхностями. Поверхность, как известно из геометрии, задается уравнением

$$f(x,\ y,\ z) = 0. \tag{7.1}$$

Если связь задана этим уравнением, то это означает, что точка может двигаться только по поверхности. Такая связь называется *удерживающей.*

Если же связь задана равенством-неравенством $f(x,\ y,\ z) \leqslant 0$, то материальная точка может двигаться в области пространства, ограниченной указанной в (7.1) поверхностью. В этом случае связь называется *неудерживающей.* Например, твердый стержень длиной l закреплен одним концом в начале координат при помощи шарового шарнира, а на втором конце имеет рассматриваемую нами движущуюся точку. Движение последней будет ограничено удерживающей связью $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$.

Если твердый стержень заменить гибкой нитью, движение точки будет ограничено неудерживающей связью $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant l^2$, запрещающей точке выходить только за пределы сферы радиусом l.

Далее в курсе неудерживающие связи мы не рассматриваем. Дадим классификацию удерживающих связей. (Она распространяется и на неудерживающие.)

Наиболее простыми связями являются *голономные*. Это связи, задаваемые алгебраическими уравнениями (7.1) или дифференциальными уравнениями, которые после интегрирования сводятся к тем же уравнениям (7.1). В свою очередь голономные связи подразделяются на *стационарные* и *нестационарные*. Уравнением (7.1) задана голономная стационарная связь; в уравнении время в явном виде не содержится. Связь осуществляется неподвижной поверхностью, не изменяющей своей формы. Уравнение $f(x, y, z, t) = 0$ задает голономную нестационарную связь и осуществляется движущейся или деформирующейся поверхностью. Как видим, голономные связи зависят только от координат и не зависят от производных координат.

Все остальные связи, уравнения которых задаются дифференциальными неинтегрируемыми уравнениями, называются *неголономными*. Наиболее сложная связь задается уравнением

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \leqslant 0,$$

т. е. является неголономной, нестационарной и неудерживающей. Общий же вид уравнений связи, с которыми мы встретимся далее, таков:

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{7.2}$$

— это *голономные, удерживающие, стационарные* и *нестационарные связи*.

Уравнения связей показывают, что одна из трех координат точки зависит от двух других. Точка при этом имеет только две (из трех для свободной) степени свободы. Наложение двух связей, уравнения которых $f_1(x, y, z, t) = 0$ и $f_2(x, y, z, t) = 0$, оставляет точке только одну степень свободы. Таким образом, наложение каждой связи уменьшает число степеней свободы на единицу.

Связи накладывают ограничения не только на координаты движущейся точки, но и на ее скорость, если даже скорость в уравнение связи не входит. Пусть связь задана уравнением (7.2). Найдем полную производную от функции f уравнения связи:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dt} + \frac{df}{dt} = 0,$$

или

$$\operatorname{grad} f\,\vec{v} = -\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{7.3}$$

Уравнение (7.3) выражает голономную нестационарную связь в дифференциальной форме. Градиент направлен по нормали к поверхности, задаваемой уравнением связи. Видим, что в случае нестационарной связи скорость точки не перпендикулярна вектору градиента. Раскладывая скорость на составляющую по направлению градиента и перпендикулярные к нему составляющие, лежащие в касательной плоскости к поверхности, заключаем, что на модуль последних никаких ограничений связью не накладывается. Ограничению подлежит только составляющая, направленная по градиенту функции связи. Для стационарной связи, выраженной формулой (7.1), вместо (7.3) имеем: $\operatorname{grad} f\,\vec{v} = 0$, и вектор скорости лежит в касательной плоскости — это единственное ограничение, накладываемое на скорость стационарной связью.

Реальная (шероховатая) поверхность, которая на движущуюся по ней точку действует с силой сухого трения, является голономной связью. Сила трения отсутствует, если поверхность идеально гладкая. Кроме приведенной выше классификации, отдельно рассматривают так называемые *идеальные* связи; при движении, ограниченном ими, работа сил трения равна нулю, и *неидеальные* связи с неравной нулю работой сил трения.

7.2. Заданные силы и силы реакции. Задача о движении несвободной материальной точки по сравнению со свободной видоизменяется следующим образом: движение точки ограничено связями и на нее (вне зависимости от связей) действуют известные силы, они называются *заданными силами.* Требуется отыскать кинематические уравнения движения. По своей природе, как уже об этом говорилось, действие связей сводится к силам, приложенным к движущейся точке. Поэтому при известных уравнениях связи оказывается возможным подобрать такую добавочную к заданным силу, которая влияет на движение точки так же, как и связь. Это положение носит название *принципа освобождаемости от связей.* Добавочные силы, заменяющие связи, называются *реакциями связей.* Физически реакции связей имеют одинаковую природу с обычными силами.

Если связь заменить соответствующей силой реакции, точка может рассматриваться как свободная и для нее будет справедливо основное уравнение динамики (6.1):

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}. \tag{7.4}$$

В уравнение в правую часть добавлен вектор силы реакции связи $\vec{R}$. Выделение силы реакции в виде отдельного слагаемого в уравнении (7.4) вызвано двумя причинами. Во-первых, в отличие от заданных сил, обозначенных в основном уравнении вектором $\vec{F}$, сила реакции связи, как правило, заранее неизвестна. Ее величину и направление можно в общем случае установить только после решения второй задачи динамики, т. е. когда будет известно движение несвободной точки. Во-вторых, силы реакции связей по величине и направлению в существенных чертах определяются заданными силами, возникают только при движении и действии заданных сил.

Если заданных сил нет и точка покоится, то наложение связей не может сообщить ей ускорение. Таким образом, силы реакции связей являются *пассивными силами;* они действуют при наличии движения или заданных сил, в противном случае не существуют. Заданные силы можно по этой же причине назвать *активными.*

Познакомимся с самыми общими свойствами сил реакции.

Если точка при наложенной связи движется по заданной неподвижной поверхности, то силу реакции всегда можно разложить на две составляющие; первая $\vec{T}$ направлена по касательной к траектории; она называется *силой трения,* вторая $\vec{N}$ — по нормали к поверх-

ности, называется *нормальной реакцией*. Итак,

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}.$$

Сила трения $\vec{T}$ всегда направлена противоположно скорости движения точки.

По закону Кулона для сухого трения сила трения пропорциональна нормальной реакции:

$$\vec{T} = -kN\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \tag{7.5}$$

Коэффициент пропорциональности k называется коэффициентом трения.

Пример 71. **Составление дифференциальных уравнений несвободной точки по заданной поверхности в декартовых координатах.**

Пусть уравнение связи имеет вид:

$$f(x, y, z) = 0, \tag{7.6}$$

т. е. связь является стационарной.

Для получения дифференциальных уравнений движения основное векторное уравнение (7.4) запишем подробнее:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} - kN\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \tag{7.7}$$

Его нужно проецировать на оси выбранной системы координат.

Так как вектор нормальной составляющей силы реакции связи $\vec{N}$ направлен по нормали к поверхности, то ее проекции на оси координат N_x, N_y и N_z находятся умножением модуля на косинусы углов, которые образует градиент с осями координат. Обозначая единичный вектор нормали к поверхности $\vec{\lambda}$, имеем:

$$\cos(\widehat{\vec{\lambda}\,\vec{i}}) = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\cos(\widehat{\vec{\lambda}\,\vec{j}}) = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\cos(\widehat{\vec{\lambda}\,\vec{k}}) = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Приняв во внимание эти формулы, можем сразу написать дифференциальные уравнения движения:

$$m\ddot{x} = F_x + \frac{N}{|\operatorname{grad} f|}\frac{\partial f}{\partial x} - kN\frac{\dot{x}}{v},$$

$$m\ddot{y} = F_y + \frac{N}{|\operatorname{grad} f|}\frac{\partial f}{\partial y} - kN\frac{\dot{y}}{v},$$

$$m\ddot{z} = F_z + \frac{N}{|\operatorname{grad} f|}\frac{\partial f}{\partial z} - kN\frac{\dot{z}}{v}.$$

Эти дифференциальные уравнения существенно упрощаются в случае идеальных связей, для которых касательная составляющая силы реакции (сила трения) равна нулю: уравнения не содержат последних членов.

Пример 7.2. **Составление дифференциальных уравнений движения материальной точки по заданной поверхности в проекциях на касательную к траектории, нормаль к поверхности и перпендикуляр к ним.**

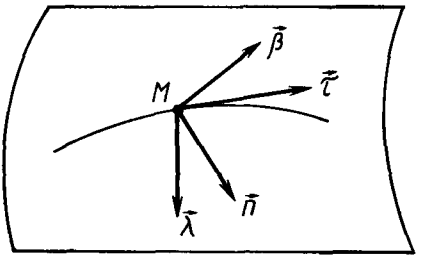

Рис. 7.1.

На рисунке 7.1 три названных в заголовке примера направления, принимаемые за оси координатной системы, представлены для точки M на траектории единичными векторами $\vec{\tau}$, $\vec{\lambda}$ и $\vec{\beta}$. Через $\vec{n}$ обозначен единичный вектор главной нормали к траектории, он расположен в плоскости $\vec{\lambda}$ и $\vec{\beta}$. При проецировании основного уравнения (7.7) на указанные оси примем во внимание, что вектор ускорения может быть представлен разложением на составляющие по направлениям касательной к траектории и главной нормали по формуле 1.19:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}.$$

Основное векторное уравнение несвободной материальной точки при естественном способе описания движения имеет вид:

$$m\left(\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}\right) = \vec{F} + \vec{N} - kN\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \qquad (7.8)$$

Проецируя последнее уравнение на рассматриваемые оси, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau - kN\frac{v}{|\vec{v}|},$$

$$m\frac{v^2}{\rho}\cos(\widehat{\vec{n}\,\vec{\lambda}}) = F_\lambda + N,$$

$$m\frac{v^2}{\rho}\sin(\widehat{\vec{n}\,\vec{\lambda}}) = F_\beta.$$

Для движения по идеально гладкой поверхности (идеальная связь) уравнения упрощаются до вида

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau,$$

$$m\frac{v^2}{\rho}\cos(\widehat{\vec{n}\,\vec{\lambda}}) = F_\lambda + N,$$

$$m\frac{v^2}{\rho}\sin(\widehat{\vec{n}\,\vec{\lambda}}) = F_\beta.$$

Первое уравнение совсем не содержит силы реакции и определяет закон движения точки по траектории. Второе уравнение определяет силу реакции (ее проекцию на направление нормали к поверхности). Сила давления $\vec{D}$, оказываемого точкой на поверхность по третьему закону Ньютона, равна нормальной реакции, а по направлению противоположна ей: $\vec{D} = -\vec{N}$. Второе уравнение позволяет рассчитать модуль силы давления:

$$D = F_\lambda - m\frac{v^2}{\rho}\cos(\widehat{\vec{n}\,\vec{\lambda}}).$$

F, определяет здесь силу статического давления, второе слагаемое — добавочную силу динамического давления, обусловленную движением точки.

Пример 7.3. **Составление дифференциальных уравнений движения материальной точки по заданной кривой в декартовых координатах.**

Теперь координаты точки должны удовлетворять двум уравнениям связи:

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0,$$

представляющим кривую как линию пересечения двух поверхностей f_1 и f_2. Пусть первая поверхность действует на точку с силой нормальной реакции $\vec{N}_1$, а вторая — $\vec{N}_2$. Тогда полная реакция равна их сумме: $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$. Она и определяет силу трения. Основное уравнение примет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 - kN\frac{\vec{v}}{v}.$$

Проецируя последнее равенство на оси координат, получим дифференциальные уравнения движения в проекциях:

$$m\ddot{x} = X + \frac{N_1}{|\operatorname{grad} f_1|}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{N_2}{|\operatorname{grad} f_2|}\frac{\partial f_2}{\partial x} - kN\frac{\dot{x}}{v},$$

$$m\ddot{y} = Y + \frac{N_1}{|\operatorname{grad} f_1|}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{N_2}{|\operatorname{grad} f_2|}\frac{\partial f_2}{\partial y} - kN\frac{\dot{y}}{v},$$

$$m\ddot{z} = Z + \frac{N_1}{|\operatorname{grad} f_1|}\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{N_2}{|\operatorname{grad} f_2|}\frac{\partial f_2}{dz} - kN\frac{\dot{z}}{v}.$$

При идеальных связях уравнения упрощаются, так как проекции силы трения (последние члены уравнений) обращаются в нули. Остаются только проекции заданных сил и нормальных составляющих сил реакций связей.

Пример 7.4. **Составление естественных дифференциальных уравнений движения материальной точки по заданной кривой.**

Проецируем уравнение (7.8) на оси естественного трехгранника $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F_\tau - kN\dfrac{v}{|\vec{v}|}, \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n + N_n, \\ 0 = F_b + N_b. \end{cases} \tag{7.9}$$

Если кривая идеально гладкая, то в первом дифференциальном уравнении последнее слагаемое (проекция силы трения) обращается в нуль.

Первое уравнение не содержит силы нормальной реакции и определяет закон движения точки по кривой. Два других уравнения позволяют вычислить величину силы нормальной реакции и ее направление в нормальной плоскости.

В целом, рассматривая движение несвободной точки, имеем дело со *смешанной* задачей динамики: по заданным силам и уравнениям связей определяем кинематические характеристики движения, а затем и силы реакции связей.

Методические замечания к § 7. Задачи на движение тел со связями типичны для школьного курса физики. Это задачи на движение транспортных средств на поворотах, мостах, на движение по наклонной плоскости, вращательное движение и т. д. Хотя о связи в школьной версии решения этих задач ничего не говорится, схема их решения аналогична рассмотренной нами выше. Рассмотрим примеры таких задач.

1. Тело массой m из состояния покоя скатывается с наклонной плоскости длиной l и высотой h при коэффициенте трения k. Найти ускорение тела и силу давления его на плоскость.

Выбирая ось Ox вдоль наклонной плоскости, по формуле (7.7) имеем согласно рисунку 7.2:

$$m\ddot{x} = mg\frac{h}{l} - kN\frac{\dot{x}}{v}, \tag{a}$$

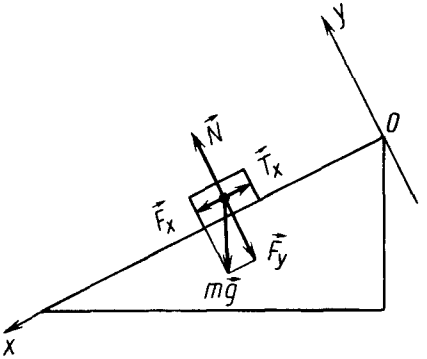

Рис. 7.2.

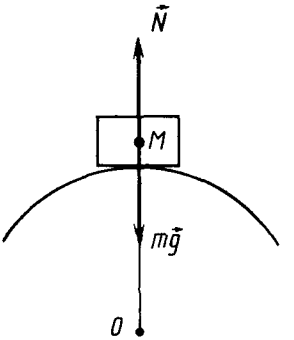

Рис. 7.3.

$$m\ddot{y} = F_y + N - kN\frac{\dot{y}}{v} \text{ (б)}, \quad 0 = -kN\frac{\dot{z}}{v}. \qquad \text{(в)}$$

Учет связи приводит к тому, что $\ddot{y} = 0$, $\dot{y} = 0$, откуда из (б)

$$N = |F_y| = mg\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}.$$

Используя начальные условия, получаем $\dot{z} = 0$, и уравнение (в) удовлетворяется тождественно. Уравнение (а) с учетом $\dot{x} = v$ и найденного значения N позволяет вычислить ускорение

$$\ddot{x} = g\frac{h}{l} - kg\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$$

и затем написать кинематическое уравнение движения.

При решении этой задачи в школе фактически используется естественный метод, хотя об этом и не говорится. Рассматривается ускорение движения вдоль наклонной плоскости и пишется уравнение

$$ma = mg\frac{h}{l} - kN.$$

Оно совпадает с первым из уравнений системы (7.9). Второе уравнение получается из условия равновесия точки относительно оси, перпендикулярной плоскости:

$$N - mg\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} = 0.$$

2. Автомобиль идет по выпуклому мосту радиуса R со скоростью v. Найти силу давления автомобиля на середину моста.

В соответствии с уравнениями (7.9) записываем:

$$ma = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{R} = mg - N, \qquad (2)$$

откуда

$$N = mg - \frac{mv^2}{R},$$

а сила давления на мост по третьему закону Ньютона равна по модулю $\vec{N}$ и противоположна по направлению. В школьной практике составляется только второе уравнение (2) по рисунку 7.3: центростремительное ускорение автомобилю придает равнодействующая сил тяжести и реакции моста.