## § 8. Движение материальной точки в неинерциальных системах отсчета

**8.1. Силы инерции.** Основное уравнение динамики точки в форме (5.5), (5.7), (6.1) записано в инерциальных системах отсчета. Однако на практике чаще встречаются *неинерциальные системы,* в большей или меньшей мере отличающиеся от инерциальных. Так, система, связанная с Землей, является неинерциальной, и считать ее приближенно инерциальной можно не для любой задачи. Наряду с инерциальными приходится пользоваться и неинерциальными системами отсчета, так как в некоторых случаях их использование оказывается удобным. Например, находясь на Земле и рассматривая движение и равновесие тел относительно Земли, удобнее учесть неинерциальность Земли, нежели пользоваться инерциальной гелиоцентрической системой отсчета, в которой Земля движется довольно сложно.

В общем случае система отсчета может быть связана с телом, движущимся произвольно в некоторой инерциальной системе отсчета. Для преобразования координат, скоростей и ускорений при переходе от нештрихованной инерциальной к штрихованной неинерциальной системе нужно пользоваться формулами для сложного движения точки: (3.1), (3.2), (3.5), (3.6) — и важными в данном вопросе формулами преобразования ускорений: (3.8), (3.9), (3.10).

Исходной для дальнейших рассуждений является формула сложения ускорений (3.10):

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{\text{п}} + \vec{a}_{\text{к}}, \tag{8.1}$$

где $\vec{a}$ — ускорение материальной точки в неподвижной, нештрихованной, системе, $\vec{a}'$ — ее ускорение в движущейся, штрихованной, системе, $\vec{a}_{\text{п}}$ — переносное ускорение, $\vec{a}_{\text{к}}$ — кориолисово ускорение.

Пусть нештрихованная система является инерциальной. Тогда в ней справедлив второй закон Ньютона. Если подставить значения ускорения в основное уравнение механики (6.1), то получим:

$$m\vec{a}' + m\vec{a}_{\text{п}} + m\vec{a}_{\text{к}} = \vec{F}. \tag{8.2}$$

Это уравнение используют в подвижной неинерциальной системе, для чего ему придают форму, подобную второму закону Ньютона:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + (-m\vec{a}_{\text{п}}) + (-m\vec{a}_{\text{к}}). \tag{8.3}$$

Здесь сила выражает действие на материальную точку других тел и полей и может быть указана, как и ранее, в виде функции координат, скорости, времени: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Движение же неинерциальной системы проявилось в уравнении через дополнительные слагаемые $m\vec{a}_{\text{п}}$ и $m\vec{a}_{\text{к}}$. Эти слагаемые кинематически в штрихованной системе обнаружены быть не могут. С помощью линейки и часов не могут быть измерены ускорения $\vec{a}_{\text{от}}$ и $\vec{a}_{\text{к}}$, измеряется только $\vec{a}'$. Эти слагаемые интерпретируются так же, как и первое слагаемое: как силы, приложенные к точке, вызывающие ускорение, входящее в $\vec{a}'$.

Таким образом, если сохранить для неинерциальной системы отсчета формулу второго закона Ньютона: произведение массы на (наблюдаемое) ускорение равно силе, то $-ma_п$ и $-ma_к$ в (8.3) следует рассматривать как *особого рода силы*. Эти силы называют *силами инерции*. Понятно, что особенность сил инерции состоит в том, что они не являются результатом действия каких-либо материальных тел или полей на рассматриваемую точку, а являются прямым результатом неинерциальности системы отсчета.

Введем обозначение для сил инерции:

$$\vec{I}_п = -m\vec{a}_п \tag{8.4}$$

называют *переносной силой инерции*,

$$\vec{I}_к = -m\vec{a}_к = -2m[\vec{\omega}\,\vec{v}_{от}] \tag{8.5}$$

называют *кориолисовой силой инерции*. В данных обозначениях основное уравнение относительного движения имеет вид:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{R} + \vec{I}_п + \vec{I}_к; \tag{8.6}$$

здесь учтены силы реакции $\vec{R}$ для несвободной материальной точки.

Если движение неинерциальной системы в некоторой инерциальной известно, то дифференциальные уравнения движения материальной точки в ней (8.6) составить легко. Обе силы инерции определяются по формулам (8.4) и (8.5). На практике отнесение движения к неинерциальной системе в ряде случаев позволяет значительно упростить решение второй задачи динамики.

Если материальная точка находится в покое по отношению к инерциальной системе, то $v_{от} = 0$, $a' = 0$, $a_к = 0$. Уравнение относительного равновесия точки будет иметь вид:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{I}_п = 0. \tag{8.7}$$

Такое уравнение следует применить к любому покоящемуся на Земле телу, чтобы определить силу реакции, зная заданную силу и учитывая силу инерции.

**8.2. Основное уравнение относительного движения.** Напишем основное векторное уравнение (8.6) динамики движения в неинерциальной системе отсчета более подробно.

Когда переносное движение представляет совокупность одного поступательного и одного вращательного движения, переносная сила инерции состоит из трех составляющих, как это видно из формулы (3.8). Если переносных движений много, их всегда можно свести к указанным двум. Рассмотрим составляющие переносной силы инерции, подставляя в формулу (8.4) выражение переносного ускорения (3.8):

$$I_п = -m\ddot{\vec{r}}_0 - m[\dot{\vec{\omega}}\,\vec{r}'] - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']]. \tag{8.8}$$

Видим, что переносная сила инерции складывается из переносной *поступательной*, переносной *вращательной* и переносной *центростремительной* составляющих.

Кориолисова сила инерции определяется выражением (8.5). Та-

ким образом, основное векторное уравнение динамики относительного движения материальной точки (8.6) в подробной записи будет иметь вид:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} + \vec{N} + kN\frac{\vec{v}}{v} - m\ddot{\vec{r}}_0 - m[\dot{\vec{\omega}}\,\vec{r}'] - \\ - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] - 2m[\vec{\omega}\,\dot{\vec{r}}'] \qquad (8\ 9)$$

Рассмотрим движение материальной точки относительно вращающейся вокруг неподвижной точки системы отсчета. Из (8 9) исчезнет член $m\ddot{\vec{r}}_0$ Для свободной точки уравнение примет вид:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m[\dot{\vec{\omega}}\,\vec{r}'] - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] - 2m[\vec{\omega}\,\dot{\vec{r}}']. \qquad (8.10)$$

При равномерном вращении системы переносная вращательная сила инерции, содержащая угловое ускорение, обратится в нуль и уравнение (8.10) упростится:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] - 2m[\vec{\omega}\,\dot{\vec{r}}'] \qquad (8.11)$$

Наконец, если материальная точка в штрихованной системе покоится, то

$$\vec{F} + \vec{R} = m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] \qquad (8.12)$$

Уравнения (8.10—8.12) представляют важные для приложений частные случаи уравнения (8.9).

Пример 8 1 **Равновесие материальной точки относительно поверхности Земли.** Земля совершает сложное движение в гелиоцентрической системе Это движение состоит из суточного вращения Земли с малой угловой скоростью $\omega \approx 7{,}3\cdot10^{-5}$ с$^{-1}$ и годового вращения вокруг Солнца с угловой скоростью, меньшей еще в 365 раз В инерциальной гелиоцентрической системе точка на поверхности Земли за счет суточного вращения обладает переносным ускорением, которое нетрудно найти А зная это ускорение, можно решать задачу на определение силы реакции Земли и веса тела, пользуясь геоцентрической неинерциальной системой, в которой необходимо учитывать силу инерции

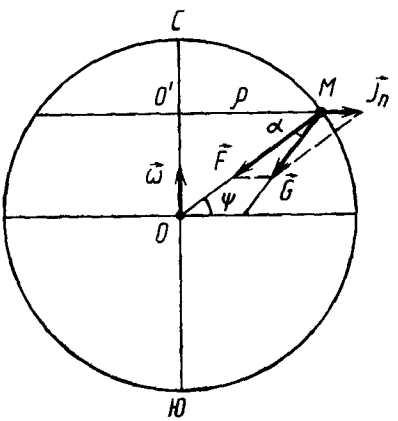

Рис 8 1

Рассмотрим равновесие точки на поверхности Земли, учитывая только ее суточное вращение (так как угловая скорость годичного вращения мала, его переносным ускорением пренебрегаем) Земля в первом приближении представляет собой шар с радиусом 6370 км Предполагая массу Земли распределенной равномерно по всему объему, силу $\vec{F}$ ньютонова тяготения, приложенную к материальной точке, можем считать постоянной по величине и направленной к центру Земли (рис 8 1) Угол ψ, образованный радиусом, проведенным к данной точке на поверхности Земли, с плоскостью экватора, называется геоцентрической широтой точки Точка *M*, участвуя в суточном вращении, движется по окружности с радиусом ρ, определяемым формулой

$\rho = R\cos\psi$ Здесь $R$ — радиус Земли Переносное ускорение точки есть центро стремительное ускорение при движении по окружности Модуль переносной силы инерции, называемой *центробежной силой,* легко вычисляется

$$I_ц = m\omega^2\rho = m\omega^2 R\cos\psi$$

Эта сила направлена по радиусу круга широты, как показано на рисунке Геометрическая сумма сил $\vec{F}$ и $\vec{I}_ц$ определяет силу тяжести $\vec{G}$, приложенную к точке

Сила реакции связи $\vec{R}$ для покоящейся точки должна уравновешивать силу тяжести Если связь осуществляется при помощи гибкой нити, на которой подвешена материальная точка, то в состоянии равновесия нить должна располагаться по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{F}$ и $\vec{I}_ц$ Это направление определяет отвесную линию в данном месте Земли Она не направлена к центру Земли Угол $\varphi$, образуемый отвесной линией с плоскостью экватора, называется географической широтой места

Суточное вращение Земли вызывает отклонение отвесной линии от направления к центру Земли Величина отклонения отвесной линии определяется углом $\alpha$ Найдем величину угла $\alpha$

Из треугольника $FGM$ (см рис 8 1) по теореме синусов пишем пропорцию

$$\frac{I_ц}{G} = \frac{\sin\alpha}{\sin\psi}$$

Вносим сюда значение $I_ц$ и $G = mg$ и получаем

$$\sin\alpha = \frac{\omega^2 R\cos\psi}{g}\sin\psi = \frac{\omega^2 R}{2g}\sin 2\psi \qquad (a)$$

Приняв $g$ равным 980 см/с$^2$ на широте в 45°, где отклонение отвесной линии достигает наибольшего значения, для $\alpha$ получаем приблизительное значение 6 угловых минут

С помощью рисунка 8 1 нетрудно заключить, что сила тяжести и ее ускорение $g$ изменяются с широтой места Для нахождения закона изменения $g$ при изменении широты напишем для треугольника $FGM$ по теореме синусов пропорцию

$$\frac{G}{F} = \frac{mg}{mg_0} = \frac{\sin\psi}{\sin(\psi+\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\psi}$$

Полагаем (в силу малости угла $\alpha$) $\cos\alpha = 1$ и заменяем $\sin\alpha$ найденным выше выражением (а)

$$g = g_0\left(1 + \frac{\omega^2 R}{g_{45°}}\cos^2\psi\right)^{-1} = g_0\left(1 + \frac{1}{289}\cos^2\psi\right)^{-1}$$

Разложим это выражение в ряд по формуле бинома Ньютона и, ограничиваясь величинами первого порядка малости, получим $g = g_0\left(1 - \frac{1}{289}\cos^2\psi\right)$

Таков теоретический закон изменения $g$ с изменением широты, полученный для шарообразной Земли Непосредственные измерения $g$ при помощи маятника приводят к следующей эмпирической формуле

$$g = g_0\left(1 - \frac{1}{192}\cos^2\psi\right)$$

Различия в коэффициенте при $\cos^2\psi$ приводят к выводу, что Земля в действительности не шар Оказывается, с хорошим приближением ее можно считать эллипсоидом вращения Полярный радиус Земли на 21 км меньше, нежели экваториальный Вследствие этого ньютоново тяготение $F$ при перемещении от полюса к экватору убывает, т е сплюснутость Земли влияет на ускорение силы тяжести так же, как и суточное вращение Земли

Пример 8 2 **Маятник Фуко.** При движении материальной точки относительно Земли, кроме центробежной силы инерции, нужно учитывать силу Кориолиса, которая направлена перпендикулярно скорости движения точки Она будет вызывать отклонение частицы от прямолинейного движения (отклонение вправо морских течений в северном полушарии, преимущественное размывание правых берегов рек, отклонение свободно падающего тела к востоку и др )

Особенно наглядно суточное вращение Земли выявляется при наблюдении за движением математического маятника большой длины со сферическим подвесом Плоскость качаний такого маятника медленно вращается в направлении видимого движения небесного свода Это впервые было обнаружено в опыте Фуко, поставленном в 1850 г в Париже Опыт Фуко имел большое значение, так как нанес последний удар по геоцентрической системе мира, защищавшейся церковью

Напишем дифференциальное уравнение движения маятника, описанного выше, относительно Земли Учитывая малость угла $\alpha$, пренебрегаем различием между географической и геоцентрической широтами Оси координат выбираем следующим образом начало координат помещаем на поверхности Земли на широте $\varphi$, где производится опыт Ось $Oz$ направим вертикально вверх, $Ox$ — по касательной к меридиану на юг, ось $Oy$ — по касательной к кругу широты, на восток Пусть длина маятника $l$, а точка подвеса расположена на оси $Oz$ так, что положение равновесия маятника совпадает с началом координат (см рис 8 2) На выбранные оси нужно проецировать основное уравнение (8 6), которое запишем следующим образом

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{R} - 2m[\vec{\omega}\,\dot{\vec{r}}]$$

Индекс при ускорении опущен и геометрическая сумма силы тяготения и центробежной силы инерции заменена вектором $\vec{G}$, направленным по оси $Oz$ (отклонением отвесной линии от радиуса пренебрегаем) Проекции вектора $\vec{G}$ на соответствующие оси таковы

$$\vec{G}\,(0,\ 0,\ -mg)$$

Вектор силы реакции нити $\vec{R}$ направлен по нити к точке подвеса Обозначая через $x$, $y$, $z$ координаты маятника, для направляющих косинусов вектора силы реакции нити получаем значения

$$-\frac{x}{l},\ -\frac{y}{l},\ \frac{l-z}{l}$$

Обозначим через $N$ величину нормальной реакции нити и тогда для проекций силы реакции на оси координат запишем следующие значения

$$\vec{R}\left(-N\frac{x}{l},\ -N\frac{y}{l},\ N\frac{l-z}{l}\right)$$

Проекции вектора угловой скорости вращения Земли, как следует из рисунка, таковы $\vec{\omega}(-\omega\cos\varphi,\ 0,\ \omega\sin\varphi)$

Для проекций кориолисовой силы инерции соответственно имеем такие выражения

$$\begin{aligned} I_{Kx} &= 2m\omega\dot{y}\sin\varphi, \\ I_{Ky} &= -2m\omega(\dot{z}\cos\varphi + \dot{x}\sin\varphi), \\ I_{Kz} &= 2m\omega\dot{y}\cos\varphi \end{aligned}$$

Располагая всеми необходимыми проекциями, запишем дифференциальные уравнения движения маятника Фуко в следующем виде

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -N\dfrac{x}{l} + 2m\omega\dot{y}\sin\varphi, \\ m\ddot{y} = -N\dfrac{y}{l} - 2m\omega(\dot{z}\cos\varphi + \dot{x}\sin\varphi), \\ m\ddot{z} = -mg + N\dfrac{l-z}{l} + 2m\omega\dot{y}\cos\varphi \end{cases}$$

Эта система уравнений сложна, и решение ее затруднительно Если мы ограничимся тем, что рассмотрим только малые колебания маятника, система дифференциальных уравнений движения станет проще и позволит довести решение до конца Будем считать отклонения маятника от положения равновесия малыми величинами и вычисления проведем с точностью до малых величин $\frac{x}{l}$, $\frac{y}{l}$ Квадратами и более

высокими степенями этих отношений пренебрегаем Тогда легко видеть, что координата $z$ будет величиной высшего порядка малости по сравнению с $x$ и $y$ Действительно, из уравнения сферы, по которой движется маятник, $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ следует

$$l - z = l\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} \approx l$$

Таким образом, в сделанном приближении следует считать $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$, т е движение маятника происходит в плоскости $xOy$ Дифференциальные уравнения движения при указанном приближении приобретают следующий вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -N\dfrac{x}{l} + 2m\omega\dot{y}\sin\varphi, \\ m\ddot{y} = -N\dfrac{y}{l} - 2m\omega\dot{x}\sin\varphi, \\ 0 = -mg + N + 2m\omega\dot{y}\cos\varphi \end{cases}$$

Третье уравнение определяет величину нормальной реакции нити маятника Последнее слагаемое в нем мало по сравнению с первыми двумя ввиду наличия двух малых множителей $\omega$ и $\dot{y}$, и поэтому им в первом приближении можно пренебречь Тогда из последнего уравнения следует, что натяжение нити маятника постоянно и равно

$$N = mg$$

Внося это значение натяжения в первые два уравнения, получаем уравнения движения маятника в плоскости $xOy$

$$\ddot{x} = -g\frac{x}{l} + 2\omega\dot{y}\sin\varphi,$$

$$\ddot{y} = -g\frac{y}{l} - 2\omega\dot{x}\sin\varphi$$

Для интегрирования этой системы умножим первое уравнение на $-y$, второе — на $x$ и сложим их Получим

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = -2\omega\sin\varphi(x\dot{x} + y\dot{y}),$$

или

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = -2\omega\sin\varphi\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$$

Введем теперь в плоскости $xOy$ полярные координаты $r$ и $\vartheta$ и с помощью формул перехода от декартовых координат к полярным последнее уравнение преобразуем к виду

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) = -2\omega\sin\varphi\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right)$$

Наконец, выполняя интегрирование, имеем

$$r^2\dot{\vartheta} = -\omega\sin\varphi r^2 + C$$

Наиболее простой характер движения маятника получится при начальном условии $r|_{t=0} = 0$ Этому условию соответствует приведение в движение маятника толчком из положения равновесия Приняв такое условие, видим, что произвольная постоянная $C$ в первом интеграле равна нулю, и мы имеем

$$\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt} = -\omega\sin\varphi$$

Плоскость качания маятника, таким образом, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega\sin\varphi$ вокруг оси $Oz$ в направлении восток — юг — запад На полюсе ($\varphi = 90°$) плоскость качаний делает за сутки полный оборот, на экваторе плоскость качаний неподвижна относительно Земли

Пример 8 3 **Свободное падение тяжелой материальной точки.**

Рассмотрим свободное падение тяжелой материальной точки с высоты $h$ без начальной скорости на поверхность Земли Основное векторное уравнение относительного движения (8 6), принимая во внимание введенную в предыдущем параграфе

силу тяжести $m\vec{g} = \vec{F} + \vec{I}_ц$, запишем в виде

$$m\vec{a} = m\vec{g} - 2m[\vec{\omega}\,\dot{\vec{r}}],$$

где учтена сила Кориолиса.

Для изучения движения относительно Земли систему координат выбираем следующим образом: в плоскости горизонта ось $Ox$ направляем на юг, ось $Oy$ — на восток, а ось $Oz$ — вертикально вверх ($\varphi \simeq \psi$) (рис. 8.2). Удобно, оставляя ориентацию осей неизменной, поместить начало координат на высоте $h$ над Землей, совместив его с начальным положением точки. При таком выборе начала координат все начальные условия будут нулевыми и все произвольные постоянные интегрирования будут равны нулю, поэтому мы их можем при решении не писать.

Спроецировав векторное уравнение на выбранные оси, получим следующие дифференциальные уравнения движения:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m(\omega_y\dot{z} - \omega_z\dot{y}), \\ m\ddot{y} = -2m(\omega_z\dot{x} - \omega_x\dot{z}), \\ m\ddot{z} = -mg - 2m(\omega_x\dot{y} - \omega_y\dot{x}). \end{cases}$$

Для решения этой системы уравнений удобнее явно ввести величину угла между скоростью движения материальной точки и угловой скоростью Земли. Сокращая на $m$ и находя проекции угловой скорости на оси, имеем:

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y}\sin\varphi,\ \ddot{y} = -2\omega(\dot{z}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi),\ \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{y}\cos\varphi. \qquad (а)$$

После первого интегрирования данных уравнений получим:

$$\dot{x} = 2\omega y\sin\varphi,\ \dot{y} = -2\omega(z\cos\varphi - x\sin\varphi),\ \dot{z} = -gt + 2\omega y\cos\varphi. \qquad (в)$$

Подставляя $\dot{y}$ в выражение для $\ddot{x}$, получаем:

$$\ddot{x} = -4\omega^2(z\cos\varphi - x\sin\varphi)\sin\varphi.$$

Так как угловая скорость мала (см. пример 8.1), членом с $\omega^2$ пренебрегаем и имеем $\ddot{x} = 0$, т. е. $\dot{x} = \text{const}$, а с учетом начальных условий $\dot{x} = 0$. Отсюда и $x = 0$ во все время движения.

Подставляя $z$ в уравнение для $\ddot{y}$, имеем в том же приближении

$$\ddot{y} = 2\omega gt\cos\varphi,\ \dot{y} = \omega gt^2\cos\varphi,$$

откуда

$$y = \frac{1}{3}\omega gt^3\cos\varphi.$$

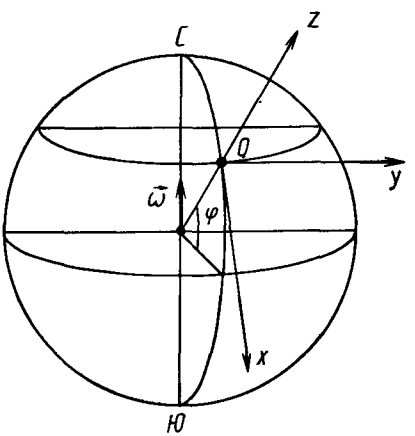

Рис. 8.2.

Наконец, подставляя найденное значение $y$ в последнее уравнение системы (в) и пренебрегая малым вторым слагаемым, получаем:

$$\dot{z} = -gt,$$

а

$$z = -\frac{gt^2}{2}.$$

Исключая из выражений для $y$ и $z$ время, находим траекторию движения: свободно падающее тело движется по параболе, заданной уравнением

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3}\omega\cos\varphi z^{\frac{3}{2}},$$

отклоняясь к востоку (по оси $Oy$) пропорционально кубу времени движения. Простой расчет показывает, что на средней широте в 60° отклонение при падении с высоты 500 м, занимающем около 10 с, дает величину $y = 0{,}2$ м.

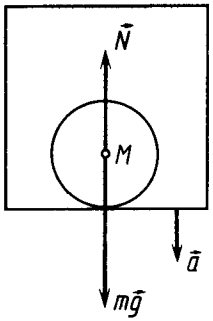


Рис. 8.3.

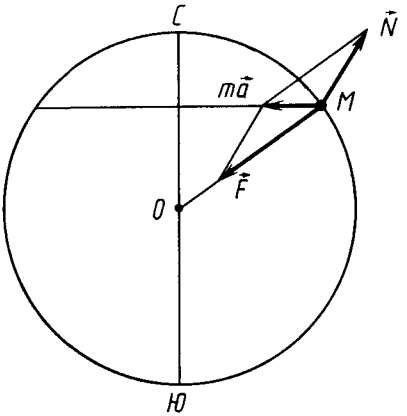


Рис. 8.4.

На полюсе, где $\varphi = 90°$, $y = 0$, т. е. тело падает по вертикали. Наибольшее отклонение на экваторе, причем оно объясняется превышением скорости движения по окружности материальной точки, поднятой над Землей, над скоростью точек на поверхности Земли.

Пример 8.4. **Решение простой задачи в инерциальной системе.** В школьном курсе механики силы инерции не рассматриваются, однако с неинерциальными системами иметь дело там приходится. При этом используется прием, по существу близкий к примененному в нашем курсе для решения вопроса о движении в неинерциальной системе. Как правило, рассматривается тело, покоящееся в неинерциальной системе, и определяется сила реакции (давление тела на опору, растягивание подвеса). Решается задача в той инерциальной системе, в которой задано движение неинерциальной. Например, для определения силы давления человека на пол лифта при опускании (поднятии) последнего с ускорением $\vec{a}$ рассматривается рисунок 8.3. Равнодействующая силы тяжести и силы реакции пола придает человеку (движущемуся вместе с лифтом) заданное ускорение лифта: $ma = mg - N$. Отсюда находится $N = m(g - a)$ и делается заключение о равной и противоположно направленной силе давления на пол.

Аналогично объясняется зависимость силы тяжести от положения тела на поверхности Земли, т. е. центробежная сила не вводится, а сила, создающая центростремительное ускорение, рассматривается как равнодействующая силы тяготения и силы реакции (рис. 8.4).

**8.3. Принцип эквивалентности. Состояние невесомости.** Силы инерции, действующие на материальную точку в неинерциальных системах отсчета, по своим проявлениям не отличаются от фундаментальной силы, действующей в гравитационном поле. Это их свойство обусловлено пропорциональностью, а при принятом выборе единиц — равенством гравитационной и инертной масс тел. Рассмотрим гравитационную и инертную массы. В законе всемирного тяготения $\vec{F} = -G\frac{m_1' m_2'}{r^3}\vec{r}$ и во втором законе Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ речь идет по существу о различных массах: $m'$ — это гравитационная масса, она вызывает силу тяготения (является аналогом электрического заряда в законе Кулона), а $m$ во втором законе Ньютона — инертная масса, определяющая ускорение при действии на тело заданной силы. *Пропорциональность и равенство $m'$ и $m$ для*

*всех тел не вытекают из каких-либо положений механики, а являются самостоятельным утверждением — обобщением экспериментальных фактов.* (Равенство тяжелой и инертной масс проверено экспериментально с очень высокой точностью.)

Важнейшим следствием равенства тяжелой и инертной масс является равенство ускорений для всех тел в данной точке гравитационного поля. В самом деле, находя ускорение тела массой $m_1$ из приведенных выше формул, имеем:

$$\vec{g} = -G\frac{m_2}{r^3}\vec{r},$$

куда масса рассматриваемого тела не входит. Также не зависят от массы и ускорения тел, вызванные силами инерции. Поэтому пропорциональность друг другу тяжелой массы и массы инертной приводит *к утверждению о неразличимости* (в небольшой части пространства за небольшие промежутки времени) *сил инерции и сил тяготения.* Это утверждение носит название *принципа эквивалентности.* Согласно этому принципу поле тяготения в небольшой области пространства и времени (оно однородное стационарное) по своему действию тождественно действию сил инерции в ускоренной системе отсчета.

Принцип эквивалентности сыграл фундаментальную эвристическую роль при создании общей теории относительности; в ОТО равноправными считаются все системы отсчета, а не только инерциальные.

Ускорение силы тяжести зависит от широты места на Земле (см. пример 8.1). Так как *весом тела называют численную величину (модуль) силы тяжести, действующей на тело, находящееся вблизи земной поверхности*[1], то вес тела также зависит от широты места на Земле.

Возможно своеобразное состояние тела в ускоренной системе, при котором отсутствуют силы реакции; оно носит название *невесомости.* Рассмотрим материальную точку в неинерциальной системе, связанной с искусственным спутником Земли как телом отсчета. (Сопротивлением движению спутника разреженных слоев атмосферы пренебрегаем; двигатели спутника не работают.) Уравнение движения материальной точки в системе спутника, штрихованной, в соответствии с формулой (8.9) и с учетом того, что спутник не имеет углового ускорения, будет иметь вид:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{R} - m\vec{a}_0 - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] - 2m[\omega\vec{v}'].$$

Ускорение движения спутника $\vec{a}_0$ в (инерциальной) системе Земля находим, применяя второй закон Ньютона к спутнику, испытывающему силу притяжения Земли:

$$m\vec{a}_0 = \vec{F}.$$

Но в таком случае

$$\vec{F} - m\vec{a}_0 = 0$$

[1] Физический энциклопедический словарь.— М.: Советская энциклопедия, 1983.— С. 70.

и окончательно получаем:

$$m\vec{a}' = \vec{R} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] - 2m[\omega\vec{v}']. \qquad (8.13)$$

Свободная от связей материальная точка движется в системе спутника ускоренно под действием центробежной и кориолисовой сил, тогда как сила притяжения Земли оказывается из уравнения исключенной. Если спутник специально не «закручен», т. е. его угловая скорость равна 0 или мала, то тела внутри спутника движутся с очень малыми ускорениями. При соприкосновении покоящегося в спутнике тела со стенкой условие равновесия тела приобретает вид:

$$\vec{R} = m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']],$$

или при $\vec{\omega} = 0$ $R = 0$, т. е. *силы реакции отсутствуют.* Такое состояние и называют состоянием *невесомости.*

Неинерциальная система спутника в небольшой области пространства вокруг него в рассмотренном случае движения спутника ведет себя как инерциальная система без силы тяготения (такие системы в общей теории относительности называют локально инерциальными). В заключение заметим, что спутник как тело отсчета не отличается от любого тела, движущегося в поле силы тяжести, поэтому вышесказанное об неинерциальной системе спутника справедливо для планет. В частности, в неинерциальной системе, связанной с Землей, сила притяжения к Солнцу не фигурирует (правда, она и весьма мала по сравнению с силой притяжения к Земле — примерно 0,0005 последней).

**Методические замечания** к определению веса и понятию невесомости. В школьном курсе *силу, с которой тело вследствие его притяжения к Земле действует на опору или подвес, называют весом тела.* Таким образом, вес $\vec{P}$ и сила тяжести $\vec{G}$ — две разные силы, приложенные к разным телам. Если тело находится в покое вблизи поверхности Земли, то $\vec{P} = \vec{G}$ и $P = G$ в соответствии с другим (данным нами выше) определением веса. Но если тело находится в неинерциальной системе отсчета, движущейся относительно Земли, то в понятие веса возможно включение других переносных сил инерции, кроме центробежной, обусловленной вращением Земли,— это видно из формулы (8.8).

Понятно, что более широкое толкование веса при школьном его определении удобно для объяснения состояния невесомости и перегрузок. Однако возникают некоторые методические трудности. Речь идет, например, о том, изменяется ли вес человека в автомобиле, выполняющем крутой поворот, чему равен вес тела в лифте, падающем с ускорением, большим $g$, куда он направлен и т. д.

В традиционной трактовке веса силы инерции включаются в него только за счет движения Земли, но отнюдь не за счет движения какой-либо другой неинерциальной системы отсчета. При таком, несомненно, более последовательном определении веса состояние невесомости нужно трактовать как статическое состояние при отсутствии сил реакции в неинерциальной системе. Вес же тела изменяется только за счет изменения положения тела относительно Земли.