ГЛАВА III. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

С формально-математической точки зрения общие теоремы динамики являются результатом простых тождественных преобразований основного векторного уравнения динамики

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

где под вектором $\vec{F}$ подразумевается равнодействующая всех сил, приложенных к точке, включая и реакции связей, если общая теорема применяется к несвободной точке.

Общие теоремы позволяют ввести ряд новых физических понятий, таких, как энергия, импульс, работа, что позволяет полнее раскрыть закономерности механического движения. Практическая ценность общих теорем состоит в возможности установления признаков, на основании которых сразу можно заключить о существовании отдельных первых интегралов движения. Постоянство же соответствующих величин имеет глубокое происхождение, связанное с основными свойствами пространства и времени; оно отражено в законах сохранения.

§ 9. Закон изменения и закон сохранения импульса материальной точки

9.1. Теорема об изменении импульса материальной точки.

Понятие импульса материальной точки является одним из наиболее общих, универсальных понятий физической науки. Оно используется не только в механике, но и во всех других разделах физики. Поэтому знание закона изменения импульса оказывается весьма существенным. В механике как определение импульса, так и закон его изменения вытекают из законов Ньютона. Теорема об изменении импульса материальной точки является результатом простейшего тождественного преобразования основного уравнения механики. Ввиду постоянства массы материальной точки основное уравнение (6.1) можно написать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}. \tag{9.1}$$

После умножения на dt получаем уравнение

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt, \tag{9.2}$$

дающее дифференциальную форму теоремы об изменении импульса. Вектор $m\vec{v}$ в формуле (9.2) называется *импульсом материальной точки* (или количеством движения материальной точки) и обозначается буквой $\vec{p}$: $\vec{p} = m\vec{v}$. Вектор $\vec{F}dt$ называется элементарным импульсом силы. Словесная формулировка теоремы, выраженной формулой (9.2), сводится к предложению: *дифференциал импульса материальной точки равен элементарному импульсу силы, приложенной к ней.*

Вектор импульса силы за конечный промежуток времени равен геометрической сумме элементарных ее импульсов за данный промежуток:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt. \tag{9.3}$$

Интегрируя уравнение (9.1) по промежутку времени $\Delta t = t_2 - t$, получаем интегральную формулировку теоремы об изменении импульса:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt. \tag{9.4}$$

В проекциях уравнения, выражающие теорему, таковы:

$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt,$$

$$m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt,$$

$$m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt.$$

Можно отметить, что Ньютон второй закон движения сформулировал в виде теоремы об изменении количества движения, а не в форме «произведение массы на ускорение равно силе».

Практическое значение теоремы об изменении импульса материальной точки при решении задач невелико, так как дифференциальная форма ее предоставляет основное уравнение динамики с разделенными переменными, и *по* сравнению с (6.1) она существенно новых соотношений не дает. Главная область применения теоремы в механике — это изучение мгновенных или ударных сил. Так называются силы, продолжительность действия которых весьма мала, и закон изменения их со временем практически остается неизвестным. Такие силы будут характеризоваться вектором импульса силы (9.3).

9.2. Закон сохранения импульса материальной точки. Этот закон следует из теоремы об изменении импульса и читается так: *если равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, равна нулю, вектор импульса тела остается величиной постоянной во все время движения,* т. е.

$$\vec{p} = m\vec{v} = \text{const}. \tag{9.5}$$

Напишем теорему об изменении импульса подробно, подставив сумму заданных сил и сил реакций в формулу (9.2), которая после подстановки примет вид:

$$d\vec{p} = (\vec{F} + \vec{R})dt. \tag{9.6}$$

В инерциальных системах отсчета импульс точки сохраняется при условии $\vec{F} + \vec{R} = 0$.

Закон сохранения импульса объединяет *три первых интеграла движения,* которые получим проецированием векторного равенства (9.5) на оси координат: $\dot{x} = C_1$, $\dot{y} = C_2$, $\dot{z} = C_2$.

Закон справедлив и для изолированной свободной от связей материальной точки, т. е. движущейся по инерции.

В поле сил могут существовать *все три* интеграла импульса, если равнодействующая равна нулю, а также *любые* два или *один*. Существование отдельных интегралов импульса связано с симметрией силового поля. Если материальная точка находится в поле сил, направленных параллельно одной из координатных осей, то существуют два интеграла движения — сохраняются проекции на оси, перпендикулярные силам. Пусть, например, силы параллельны оси Oz, тогда $\vec{F} \neq 0$, $F_z \neq 0$, $F_x = F_y = 0$.

В этом случае существуют два первых по порядку следования из вышеуказанных интегралов. Если же силы располагаются в плоскостях, перпендикулярных одной из осей, то существует один интеграл относительно данной оси. Пусть, например, силы располагаются в плоскости, перпендикулярной оси Ox. Тогда

$$\vec{F} \neq 0,\ F_y \neq 0,\ F_z \neq 0,\ F_x = 0.$$

В этом случае существует только интеграл $\dot{x} = C_1$. К изменению импульса приводят также силы реакции связей.

Заметим, что импульс — величина не инвариантная при преобразованиях Галилея. В самом деле, с помощью формулы (3.13) имеем: $p_x = mv + p_{x'}$, $p_y = p_{y'}$, $p_z = p_{z'}$.

Методическое замечание к понятию импульса. Закон сохранения импульса изолированной материальной точки и форма основного уравнения динамики (9.1) дают возможность логически просто и последовательно ввести понятие силы и второй закон Ньютона. Если импульс тела изучить до законов Ньютона, то закон инерции можно сформулировать как закон сохранения импульса изолированной материальной точки. Далее следует постулировать сохранение импульса в замкнутой системе материальных точек. Взаимодействие в такой системе будет заключаться в передаче импульса от одних точек к другим, а сила, действующая на материальную точку, будет некоторой функцией положения рассматриваемой точки относительно остальных, определяющей скорость передачи импульса рассматриваемой точки от других точек системы. Уравнение (9.1), т. е. второй закон Ньютона, запишется как следствие закона сохранения импульса системы точек: импульс, полученный материальной точкой (в единицу времени), равен импульсу, переданному ей другими точками. Анализ процесса обмена импульсом между двумя точками немедленно приводит к следствию — третьему закону Ньютона. Важно, что трактовка силы и второго закона Ньютона в форме (9.1) без каких-либо изменений применима к действию на материальную точку физического поля. В этой трактовке сила есть скорость передачи импульса точке полем, определяющаяся параметрами поля и положением точки в нем. Это значит, что понятие силы находит обобщение за пределами чисто механической концепции взаимодействия (см. § 5). Также объясняется ограниченность применения третьего закона Ньютона при наличии полей: обмен импульсами может происходить между телом и полем, между телами через поле, но не непосредственно между двумя телами.

Пример 9.1. **Использование теоремы об изменении импульса для изучения удара.**

Ударом называют такое взаимодействие, при котором за очень малый промежуток времени (порядка сотых — десятитысячных секунды) импульсы соударяющихся точек (тел) изменяются на конечную величину.

При соударении возникают мгновенные или импульсные силы, которые могут достигать огромной величины. Пусть время удара τ. Применим теорему (9.4) об изменении импульса к испытавшей удар материальной точке:

$$m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \int_t^{t+\tau} \vec{F}dt = \vec{K}.$$

В этом случае $\vec{K}$ называется ударным импульсом.

Как правило, закон изменения ударной силы за время удара неизвестен. Усредняя силу, получим (из предыдущего равенства по теореме о среднем) ударный импульс:

$$m\Delta\vec{v} = \bar{\vec{F}}\tau.$$

Это уравнение называют *основным уравнением удара*. Приращение скорости за время удара пропорционально величине ударной силы и совпадает с ней по направлению.

§ 10. Закон изменения и закон сохранения момента импульса материальной точки

10.1. Момент силы. Момент импульса. *Моментом силы относительно произвольной точки O называется вектор* $\vec{M}$, определяемый формулой

$$\vec{M} = [\vec{r}\ \vec{F}], \tag{10.1}$$

где $\vec{r}$ — вектор, проведенный из точки O в точку приложения силы (рис. 10.1). Как следует из определения, т. е. формулы (10.1), вектор момента силы направлен перпендикулярно плоскости векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$ и образует с ними правовинтовую систему. Величина момента силы равна удвоенной площади треугольника OAB. Момент $\vec{M}$ зависит от выбора точки O, которую далее будем называть *моментной*. Взяв моментную точку O за начало координат, имеем следующие выражения для проекций момента силы на оси декартовых прямоугольных координат:

$$\begin{cases} M_x = yF_z - zF_y, \\ M_y = zF_x - xF_z, \\ M_z = xF_y - yF_x. \end{cases} \tag{10.2}$$

Моментом силы относительно некоторой оси (прямой) называют проекцию на ось вектора момента силы, взятого относительно какой-либо точки на оси. Целесообразность такого определения состоит в том, что момент силы относительно оси не зависит от выбора моментной точки, лишь бы она находилась на этой оси. Докажем эту независимость.

Пусть направление оси определяется единичным вектором $\vec{s}_0$ (рис. 10.2). Запишем проекции момента силы относительно произ-

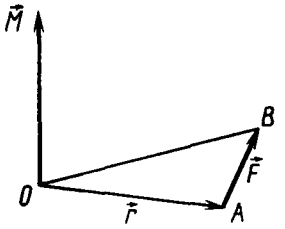

Рис. 10.1.

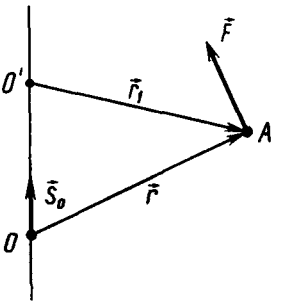

Рис. 10.2.