Как правило, закон изменения ударной силы за время удара неизвестен. Усредняя силу, получим (из предыдущего равенства по теореме о среднем) ударный импульс:

$$m\Delta\vec{v} = \bar{\vec{F}}\tau.$$

Это уравнение называют *основным уравнением удара*. Приращение скорости за время удара пропорционально величине ударной силы и совпадает с ней по направлению.

§ 10. Закон изменения и закон сохранения момента импульса материальной точки

10.1. Момент силы. Момент импульса. *Моментом силы относительно произвольной точки O называется вектор* $\vec{M}$, определяемый формулой

$$\vec{M} = [\vec{r}\ \vec{F}], \tag{10.1}$$

где $\vec{r}$ — вектор, проведенный из точки O в точку приложения силы (рис. 10.1). Как следует из определения, т. е. формулы (10.1), вектор момента силы направлен перпендикулярно плоскости векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$ и образует с ними правовинтовую систему. Величина момента силы равна удвоенной площади треугольника OAB. Момент $\vec{M}$ зависит от выбора точки O, которую далее будем называть *моментной*. Взяв моментную точку O за начало координат, имеем следующие выражения для проекций момента силы на оси декартовых прямоугольных координат:

$$\begin{cases} M_x = yF_z - zF_y, \\ M_y = zF_x - xF_z, \\ M_z = xF_y - yF_x. \end{cases} \tag{10.2}$$

Моментом силы относительно некоторой оси (прямой) называют проекцию на ось вектора момента силы, взятого относительно какой-либо точки на оси. Целесообразность такого определения состоит в том, что момент силы относительно оси не зависит от выбора моментной точки, лишь бы она находилась на этой оси. Докажем эту независимость.

Пусть направление оси определяется единичным вектором $\vec{s}_0$ (рис. 10.2). Запишем проекции момента силы относительно произ-

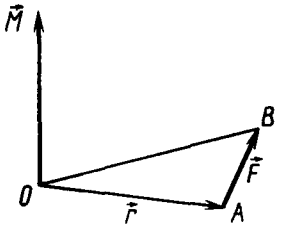

Рис. 10.1.

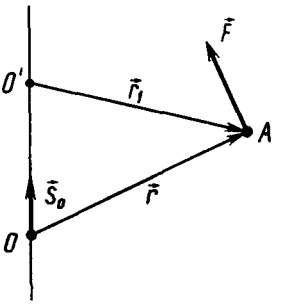

Рис. 10.2.

вольных точек O и O_1 на оси:

$$M_0 = [\vec{r}\ \vec{F}]\vec{s}_0,\ M_{0,1} = [\vec{r}_1\vec{F}]\vec{s}_0.$$

Введем вектор $\overrightarrow{OO_1}$ и найдем связь радиус-векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}_1$ между собой. Из рисунка видно, что $\vec{r} = \overrightarrow{OO_1} + \vec{r}_1$. Подставив $\vec{r}$ в выражение для момента относительно точки O, имеем:

$$M_0 = [\overrightarrow{OO_1}\vec{F}]\vec{s}_0 + M_{0,1} = M_{0,1},$$

так как смешанное произведение, в которое входят два коллинеарных вектора $\overrightarrow{OO_1}$ и $\vec{S}_0$, равно нулю. Тем самым утверждение о независимости момента относительно оси от выбора моментной точки на оси доказано.

Формулы (10.2) определяют моменты силы $\vec{F}$ относительно координатных осей. Момент силы относительно оси часто называют *вращательным моментом силы.* Легко видеть, что момент силы относительно оси, перпендикулярной плоскости, в которой расположена сила, максимален. Вращательный момент по модулю в этом случае определяется произведением модуля силы на плечо. (Плечо — расстояние по перпендикуляру между осью и линией действия силы.) Если моментная ось и сила расположены в одной плоскости, вращательный момент силы обращается в нуль.

Модуль вектора момента силы относительно произвольной моментной точки также можно определить произведением модуля силы на плечо. В общем случае *плечо силы равно длине перпендикуляра, опущенного из моментной точки на линию действия силы.*

Момент импульса материальной точки определяется аналогично моменту силы с помощью следующей формулы:

$$\vec{L} = [\vec{r}\ \vec{p}] = m[\vec{r}\ \vec{v}]. \qquad (10.3)$$

Будем считать, что точка O совпадает с началом системы координат. Тогда момент импульса связан простым соотношением с секторной скоростью точки — формула (1.14), а именно $\vec{L} = 2m\vec{\sigma}$.

Проекции на оси прямоугольной декартовой системы координат выражаются формулами:

$$L_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}),$$
$$L_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}),$$
$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Каждая из этих формул определяет момент импульса материальной точки относительно соответствующей координатной оси.

10.2. Теорема об изменении момента импульса материальной точки. Умножим почленно основное векторное уравнение динамики в форме (9.1) слева векторно на радиус-вектор точки. При этом в правой части равенства получим геометрическую сумму моментов заданных сил и сил реакции связей. Обозначая указанную сумму

одной буквой $\vec{M}$, полученное уравнение запишем так:

$$m\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{v}}{dt}\right] = \vec{M}.$$

Левую часть можно преобразовать:

$$\vec{r}\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}[\vec{r}\,\vec{v}] - \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\,\vec{v}\right] = \frac{d}{dt}[\vec{r}\,\vec{v}].$$

Окончательно имеем уравнение

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \qquad (10.4)$$

Это и есть формула теоремы об изменении момента импульса материальной точки, которая читается: *производная по времени вектора момента импульса материальной точки по величине и направлению совпадает с вектором суммы моментов всех сил, приложенных к материальной точке.*

В проекциях на оси декартовых прямоугольных координат теорема выражается системой следующих трех уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}m(y\dot{z} - z\dot{y}) = M_x, \\ \frac{d}{dt}m(z\dot{x} - x\dot{z}) = M_y, \\ \frac{d}{dt}m(x\dot{y} - y\dot{x}) = M_z. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений можно трактовать как теорему об изменении момента импульса материальной точки относительно соответствующей координатной оси.

10.3. Закон сохранения момента импульса. Закон имеет следующую формулировку: *если момент сил, действующих на материальную точку, равен нулю, то вектор момента импульса остается величиной постоянной на протяжении всего времени движения.*

Этот закон выполняется в инерциальных системах отсчета и для *изолированной свободной* материальной точки, т. е. точки, движущейся по инерции. Однако гораздо существеннее то, что сохранение момента импульса может иметь место в силовом поле. Рассмотрим отдельные случаи сохранения момента импульса при действии сил на движущуюся точку.

Пусть вектор силы, приложенной к точке, остается все время коллинеарным радиус-вектору точки. Такая сила называется *центральной и точка O — центром силы.* Примером центральной силы служит сила тяготения, приложенная к планете, со стороны Солнца, сила кулоновского притяжения (отталкивания), действующая на точечный электрический заряд со стороны второго точечного заряда, и др. Момент центральной силы относительно ее центра обращается в нуль. Применяя к точке, движущейся под действием центральной силы, теорему об изменении момента импульса в форме (10.4), приходим к закону сохранения момента импульса ма-

териальной точки:

$$\vec{L} = m[\vec{r}\,\vec{v}] = \overrightarrow{\text{const}}. \qquad (10.5)$$

Закон сохранения момента импульса объединяет три первых интеграла движения, называемых *интегралами площадей*. Проецируя равенство (10.5) на оси декартовой системы, получаем:

$$\begin{cases} y\dot{z} - z\dot{y} = C_4, \\ z\dot{x} - x\dot{z} = C_5, \\ x\dot{y} - y\dot{x} = C_6. \end{cases} \qquad (10.6)$$

Каждый из этих первых интегралов движения выражает постоянство проекции секторной скорости для движения проекции точки на соответствующую координатную плоскость.

При движении точки под действием центральной силы траекторией движения обязательно будет *плоская* кривая. Это заключение следует из определения вектора $\vec{L}$ по формуле (10.3) и требования сохранения постоянства его направления в соответствии с формулой (10.5). Кроме того, из постоянства модуля вектора $\vec{L}$ следует, что точка будет двигаться по траектории с постоянной секторной скоростью (радиус-вектор точки в равные промежутки времени будет описывать равные площади).

Пусть к точке приложна не центральная сила, а такая, направление которой при движении точки не изменяется. Тогда вращательный момент силы относительно любой оси, параллельной силе, равен нулю и имеет место один из интегралов площадей (10.6). Точка движется, сохраняя момент импульса относительно данной оси неизменным.

В соответствии с определением момента импульса, выраженным формулой (10.3) и формулами преобразования координат Галилея (3.11), момент импульса не является инвариантной величиной, а преобразуется по формуле:

$$\vec{L} = [\vec{r}'m\vec{v}_{\text{п}}] + [\vec{v}_{\text{п}}tm\vec{v}'] + \vec{L}'. \qquad (10.7)$$

В заключение отметим, что рассмотренные теоремы динамики материальной точки позволили получить *шесть* интегралов движения: *три интеграла проекций импульса и три интеграла проекций момента импульса*. Однако не все эти интегралы оказываются независимыми. Умножив скалярно (9.5) на (10.5) и сократив на квадрат массы, получим:

$$\vec{v}[\vec{r}\,\vec{v}] = C_1C_4 + C_2C_5 + C_3C_6 = 0,$$

так как смешанное произведение, содержащее два одинаковых вектора, равно нулю. Это означает, что из шести интегралов проекций импульса и момента импульса независимых только пять.

Одновременное сохранение импульса и момента импульса имеет место только при $\vec{F} = 0$, например для изолированной свободной точки, движущейся по инерции.