§ 11. Работа силы. Потенциальная энергия материальной точки в силовом поле

11.1. Работа силы. *Работа постоянной силы $\vec{F}$ на прямолинейном перемещении $\Delta\vec{r}$, образующем с направлением силы угол α, определяется формулой*

$$A = F\Delta r \cos\alpha = \vec{F}\Delta\vec{r}.$$

При переменной силе и движении по кривой такое определение работы непригодно. К общему определению работы (для переменной силы и произвольного движения) приходим обычным способом: применяем математический анализ.

Пусть траекторией материальной точки служит кривая AB (рис. 11.1). Разбиваем отрезок кривой между точками (1) и (2) на бесконечно малые элементы, которые можно рассматривать как прямолинейные. Пусть $d\vec{r}$ — вектор бесконечно малого перемещения и $\vec{F}$ — вектор силы для данного положения точки на кривой. Тогда последняя формула может быть применена для вычисления работы силы на бесконечно малом перемещении. Учитывая это, получим для *элементарной* работы:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \qquad (11.1)$$

В общем случае линейная функция дифференциалов координат в (11.1) не является полным дифференциалом какой-либо функции координат. Чтобы отметить это обстоятельство в обозначении элементарной работы, применена буква δ.

Для определения работы на конечном участке кривой AB нужно просуммировать элементарные работы. Таким образом, *алгебраическая сумма элементарных работ на всех элементах дуги кривой AB между указанными точками кривой (1) и (2) есть работа силы на конечном участке траектории:*

$$A_{1,2} = (AB)\int \vec{F}d\vec{r} = (AB)\int (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \qquad (11.2)$$

Кратко работу силы можно определить как интеграл от силы, взятый вдоль траектории движения точки. (В математике такие интегралы называются криволинейными.)

Для вычисления работы силы в общем случае необходимо знать кинематические уравнения движения точки. Тогда криволинейный интеграл в (11.2) может быть сведен к определенному интегралу. Действительно, пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — кинематические уравнения движения (тогда $dx = \dot{x}dt$ и т. д.) и проекции силы F_x, F_y, F_z после внесения в них значений координат и производных координат по времени будут известными функциями времени. Таким образом, элементарная

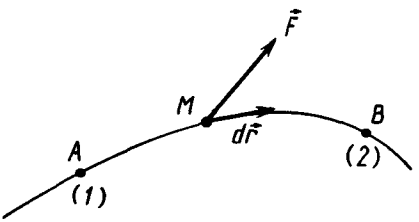

Рис 11 1

работа будет иметь вид:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \Phi(t)dt,$$

где $\Phi(t)$ — известная функция времени. Далее из уравнений движения определяем моменты времени t_1 и t_2, соответствующие нахождению точки в положениях (1) и (2). Это даст нам пределы интегрирования по t. Окончательно имеем:

$$A_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t)dt,$$

т. е. работа вычисляется как определенный интеграл от функции времени.

11.2. Потенциальные силы. Потенциальная энергия материальной точки в силовом поле. *Потенциальными силами* называются силы, не зависящие от скорости движения точки

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t) \tag{11.3}$$

и удовлетворяющие условию

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U. \tag{11.4}$$

Здесь U — скалярная функция, называемая *потенциальной энергией* и также не зависящая от скорости, т. е.

$$U = U(x, y, z, t). \tag{11.5}$$

Условие потенциальности силы (11.4) иногда оказывается неудобным для практического применения, так как требуется знание потенциальной энергии, которую часто следует находить. Поэтому оно заменяется следующим эквивалентным условием:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = 0, \tag{11.6}$$

ибо rot grad $U = 0$ для любой функции[1].

Условие (11.4) в проекциях на оси декартовой системы координат выражается тремя равенствами:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

а условие (11.6) приводится к виду

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}.$$

Последние равенства не содержат потенциальной энергии, и для проверки потенциальности силы достаточно убедиться в справедливости любых двух из них. Заметим, что условия потенциальности тривиально выполняются для силового поля, проекции сил в котором не зависят от координат, т. е. *однородное поле потенциально.*

Следует различать *стационарную* и *нестационарную силы.* Стационарная явно от времени не зависит, и ей соответствует *стационарное поле,* задаваемое функциями:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z), \quad U = U(x, y, z). \tag{11.7}$$

[1] См. приложение II, № 1, 4.

Нестационарной потенциальной силой называется сила, которая явно зависит от времени, и потенциальное поле является нестационарным; оно описывается общей формулой (11.5).

Рассмотрим сначала, как вычисляется работа и потенциальная энергия в стационарном поле (11.7). Найдем элементарную работу потенциальной силы:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = -\operatorname{grad} U(x, y, z)d\vec{r} =$$
$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -dU.$$

В этом случае

$$\delta A = -dU, \tag{11.8}$$

$$A_{1,2} = \int\limits_{(1)}^{(2)} \vec{F}d\vec{r} = -\int\limits_{U_1}^{U_2} dU = U_1 - U_2. \tag{11.9}$$

Из формулы (11.9) видно, что *работа не зависит от формы траектории и определяется разностью потенциальных энергий в начале и конце отрезка траектории.*

Потенциальная энергия в любой точке поля выражается с помощью неопределенного интеграла:

$$U = -\int \vec{F}d\vec{r} + C \tag{11.10}$$

и всегда вычисляется с точностью до произвольной постоянной C, которой можно придать любое значение (если возможно, то удобнее всего нуль). Выбор постоянной C — начальной энергии — носит название нормирования (калибровки) потенциальной энергии. Возможность произвольного выбора начала отсчета для U объясняется тем, что величина потенциальной энергии непосредственно не измеряется; измеряется только работа, равная разности энергий.

Рассмотрим теперь нестационарное силовое поле, заданное формулой (11.3). Для него потенциальная энергия выражается функцией (11.5), содержащей время явно. Как и в стационарном поле, потенциальная нестационарная сила определена формулой

$$\vec{F}(\vec{r},t) = -\operatorname{grad} U(\vec{r},t),$$

но, так как $dU(x, y, z, t) = \operatorname{grad} U d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t}dt$,

вместо формулы для элементарной работы (11.8) получаем:

$$\delta A = -dU + \frac{\partial U}{\partial t}dt. \tag{11.11}$$

Вычислить работу как убыль потенциальной энергии теперь нельзя, и для расчета работы следует пользоваться формулой (11.2). Зная силу, потенциальную энергию находим с помощью равенства (11.4), которое в проекциях приводит к следующим трем дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x(\vec{r},t), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -F_y(\vec{r},t), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -F_z(\vec{r},t).$$

Все эти уравнения удовлетворяются, в чем нетрудно убедиться с помощью дифференцирования, следующим решением:

$$U = -\int \vec{F}(\vec{r},t)d\vec{r} + C. \qquad (11.12)$$

Таким образом, в случае нестационарного поля потенциальная энергия находится по той же формуле (11.10), что и для стационарного, однако в нее в качестве *параметра* входит время.

Кроме потенциальных полей, удовлетворяющих условию (11.6), существуют силовые поля, для которых $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{j}(\vec{r},t)$, где $\vec{j}(\vec{r},t)$ — некоторая функция координат и времени. Такие поля непотенциальны, и понятие потенциальной энергии для них неприменимо. В непотенциальном поле δA не является полным дифференциалом, и работа на конечном участке кривой зависит от формы этой кривой.

Примером непотенциального поля является электромагнитное поле в его общем случае. К непотенциальным силам принадлежат силы трения, сопротивления среды движению тел.

Пример 11.1. **Расчет потенциальной энергии в однородном поле силы тяжести.**

Направив ось Oz вертикально вверх, для проекции силы получаем выражения $F_x = F_y = 0$, $F_z = -mg$. Элементарная работа имеет вид:

$$\delta A = -mgdz = -d(mgz + C).$$

Отсюда потенциальная энергия силы тяжести является функцией координат: $U = mgz + C$. Приписывая потенциальной энергии для какой-нибудь точки пространства числовое значение, можно устранить произвольную постоянную. Это и называется нормировкой потенциальной энергии. Полагая, например, потенциальную энергию равной нулю при $z = 0$, получим более простое выражение:

$$U = mgz. \qquad (11.13)$$

Пример 11.2. **Вычисление потенциальной энергии для квазиупругой силы.** Сила, изменяющаяся по закону

$$\vec{F} = -k\vec{r}, \qquad (11.14)$$

называется квазиупругой. Коэффициент k называется коэффициентом жесткости квазиупругой силы. Проекции квазиупругой силы на оси координат таковы:

$$F_x = -kx,\ F_y = -ky,\ F_z = -kz.$$

Поэтому для элементарной работы получается следующее выражение:

$$\delta A = -k(xdx + ydy + zdz) = -d\left(k\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + C\right) = -d\left(\frac{kr^2}{2} + C\right).$$

Приняв для потенциальной энергии значение $U|_{r=0} = 0$, получаем ее окончательное выражение:

$$U = \frac{1}{2}kr^2. \qquad (11.15)$$

Пример 11.3. **Вывод формулы потенциальной энергии в поле силы ньютонова тяготения.**

Обозначим через $\vec{r}$ радиус-вектор, проведенный от Солнца к планете, m — массу планеты, M — массу Солнца.

Тогда вектор силы тяготения, приложенной к планете, выразится равенством

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}. \qquad (11.16)$$

(Это формула закона всемирного тяготения Ньютона.)

Выпишем проекции силы на оси координат с началом в центре Солнца:

$$F_x = -G\frac{mM}{r^3}x,\ F_y = -G\frac{mM}{r^3}y,\ F_z = -G\frac{mM}{r^3}z.$$

Для элементарной работы получим формулу:

$$\delta A = -G\frac{mM}{r^3}(xdx + ydy + zdz) = -G\frac{mM}{r^3}d\left(\frac{r^2}{2} + C\right),$$

$$\delta A = -G\frac{mM}{r^2}dr = -d\left(-G\frac{mM}{r} + C\right).$$

Отсюда следует выражение для искомой потенциальной энергии: $U = -G\frac{mM}{r} + C$.

В данном случае потенциальная энергия нормируется обычно на бесконечность, т. е. полагают $U|_{r=\infty} = 0$. Окончательно получаем:

$$U = -G\frac{mM}{r} = -\frac{\gamma m}{r}. \qquad (11.17)$$

Пример 11.4. **Расчет потенциальной энергии нестационарной силы.**

Все приведенные выше примеры относятся к стационарным полям. В качестве нестационарного потенциального поля рассмотрим электрическое однородное, т. е. постоянное в пространстве, но переменное во времени (например, поле в конденсаторе или электрическую составляющую поля электромагнитной волны в небольшой по сравнению с длиной волны области пространства). Напряженность такого поля выражается формулой

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t,$$

а сила, действующая на точечный электрический заряд,—

$$\vec{F} = q\vec{E}_0 \cos \omega t.$$

Используя непосредственно формулу (11.12), имеем:

$$U = -q\vec{E}_0 \cos \omega t \int d\vec{r} + C = -q\vec{E}_0\vec{r} \cos \omega t + C. \qquad (11.18)$$

Потенциальная энергия зависит от времени по гармоническому закону.

§ 12. Закон изменения и закон сохранения механической энергии материальной точки

12.1. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Выполним преобразование основного уравнения динамики, для того чтобы от силы, действующей на материальную точку, перейти к работе этой силы. Умножая скалярно обе части основного уравнения динамики на вектор бесконечно малого перемещения точки, получаем: $m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = \vec{F}d\vec{r}$.

После простого тождественного преобразования левой части полученного равенства имеем: $md\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}d\vec{v}$.

Далее с помощью тождества $m\vec{v}\cdot d\vec{v} = d(\frac{1}{2}mv^2)$ приходим к искомому уравнению:

$$d(\frac{1}{2}mv^2) = \vec{F}d\vec{r}. \qquad (12.1)$$

Уравнение (12.1) показывает, что элементарная работа силы, действующей на материальную точку, равна элементарному при-