Выпишем проекции силы на оси координат с началом в центре Солнца:

$$F_x = -G\frac{mM}{r^3}x,\ F_y = -G\frac{mM}{r^3}y,\ F_z = -G\frac{mM}{r^3}z.$$

Для элементарной работы получим формулу:

$$\delta A = -G\frac{mM}{r^3}(xdx + ydy + zdz) = -G\frac{mM}{r^3}d\left(\frac{r^2}{2} + C\right),$$

$$\delta A = -G\frac{mM}{r^2}dr = -d\left(-G\frac{mM}{r} + C\right).$$

Отсюда следует выражение для искомой потенциальной энергии: $U = -G\frac{mM}{r} + C$.

В данном случае потенциальная энергия нормируется обычно на бесконечность, т. е. полагают $U|_{r=\infty} = 0$. Окончательно получаем:

$$U = -G\frac{mM}{r} = -\frac{\gamma m}{r}. \qquad (11.17)$$

Пример 11.4. **Расчет потенциальной энергии нестационарной силы.**

Все приведенные выше примеры относятся к стационарным полям. В качестве нестационарного потенциального поля рассмотрим электрическое однородное, т. е. постоянное в пространстве, но переменное во времени (например, поле в конденсаторе или электрическую составляющую поля электромагнитной волны в небольшой по сравнению с длиной волны области пространства). Напряженность такого поля выражается формулой

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t,$$

а сила, действующая на точечный электрический заряд,—

$$\vec{F} = q\vec{E}_0 \cos \omega t.$$

Используя непосредственно формулу (11.12), имеем:

$$U = -q\vec{E}_0 \cos \omega t \int d\vec{r} + C = -q\vec{E}_0\vec{r} \cos \omega t + C. \qquad (11.18)$$

Потенциальная энергия зависит от времени по гармоническому закону.

§ 12. Закон изменения и закон сохранения механической энергии материальной точки

12.1. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Выполним преобразование основного уравнения динамики, для того чтобы от силы, действующей на материальную точку, перейти к работе этой силы. Умножая скалярно обе части основного уравнения динамики на вектор бесконечно малого перемещения точки, получаем: $m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = \vec{F}d\vec{r}$.

После простого тождественного преобразования левой части полученного равенства имеем: $md\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}d\vec{v}$.

Далее с помощью тождества $m\vec{v}\cdot d\vec{v} = d(\frac{1}{2}mv^2)$ приходим к искомому уравнению:

$$d(\frac{1}{2}mv^2) = \vec{F}d\vec{r}. \qquad (12.1)$$

Уравнение (12.1) показывает, что элементарная работа силы, действующей на материальную точку, равна элементарному при-

ращению (дифференциалу) величины $\frac{1}{2}mv^2$, называемой *кинетической энергией* материальной точки и обозначаемой через букву T:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{12.2}$$

С учетом формулы (12.2) вместо (12.1) имеем:

$$dT = \delta A. \tag{12.3}$$

Уравнения (12.1) или (12.3) дают дифференциальную форму теоремы об изменении кинетической энергии: *дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе сил, приложенных к этой точке.*

Интегрируя равенство (12.1) по траектории между какими-либо двумя точками (*1*) и (*2*) (см. рис. 11.1) и обозначая через v_1 и v_2 скорости материальной точки в этих положениях, имеем:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}d\vec{r},$$

или

$$T_2 - T_1 = A_{1,2}. \tag{12.4}$$

Полученное равенство выражает интегральную форму теоремы об изменении кинетической энергии: *приращение кинетической энергии материальной точки на некотором участке траектории равно алгебраической сумме элементарных работ, совершенных силами, приложенными к точке.*

12.2. Закон сохранения полной механической энергии материальной точки. Из теоремы об изменении кинетической энергии, выраженной формулой (12.1) при дополнительных условиях, которые сейчас будут рассмотрены, вытекает закон сохранения *полной механической энергии;* ею называют *сумму кинетической и потенциальной энергий* материальной точки. Полная энергия обозначается через E и выражается формулой

$$E = T + U. \tag{12.5}$$

Рассмотрим движение несвободной материальной точки относительно инерциальной системы отсчета. Уравнение теоремы об изменении энергии будет иметь вид:

$$d(\frac{1}{2}mv^2) = (\vec{F} + \vec{R})d\vec{r}, \tag{12.6}$$

где $\vec{F}$ — геометрическая сумма заданных сил, а $\vec{R}$ — геометрическая сумма сил реакций связей, наложенных на материальную точку.

Если связи являются идеальными (§ 7), то работа сил реакций равна нулю: $\vec{R}d\vec{r} = 0$. Приращение кинетической энергии имеет вид: $d(\frac{1}{2}mv^2) = \vec{F}d\vec{r}$. Пусть все заданные силы являются потенциальными и стационарными. Тогда $\delta A = \vec{F}d\vec{r} = -dU(x, y, z)$, т. е. элементарная работа заданных сил выражается через дифференциал потенциальной энергии стационарного поля. Теперь вместо формулы (12.6)

можно написать: $d(\frac{1}{2}mv^2 + U) = 0$, откуда следует постоянство величины в скобках. Итак, в рассмотренном случае имеет место закон сохранения полной механической энергии, который выражается формулой

$$E = T + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z) = \text{const}. \quad (12.7)$$

Если материальная точка, на которую наложены идеальные связи, движется в стационарном потенциальном поле, то ее полная механическая энергия остается величиной постоянной. Формула (12.7) выражает первый интеграл движения — интеграл энергии.

Разумеется, закон справедлив и для свободной от связей материальной точки, движущейся в потенциальном поле.

Закон сохранения полной механической энергии есть только частный случай закона сохранения и превращения энергии в природе. Последний не знает исключений, в то время как закон сохранения механической энергии имеет место лишь для потенциальных полей и идеальных связей. Действительно, пусть наряду с потенциальными силами к точке приложены силы трения и сопротивления среды. Тогда работа на заданном перемещении в соответствии с формулой (11.9) представится так: $A_{1,2} = U_1 - U_2 + A'_{1,2}$. При этом работа сил трения и сопротивления среды $A'_{1,2}$ — отрицательна, так как силы направлены противоположно скорости движения. Подстановка величины $A_{1,2}$ в уравнение (12.4) дает с учетом (12.5):

$$E_2 - E_1 = A'_{1,2},\ A'_{1,2} < 0,\ E_2 < E_1.$$

Отсюда видно, что *механическая энергия при движении точки убывает.*

Силы трения и сопротивления среды, уменьшающие или рассеивающие механическую энергию, называются *диссипативными.*

Определенный интерес представляет случай, при котором равнодействующая активных и диссипативных сил равна нулю. В таком случае $U_2 - U_1 = A'_{1,2}$, т. е. при постоянной скорости кинетическая энергия постоянна, а потенциальная убывает: $U_2 < U_1$. Благодаря постоянству скорости не изменяется и импульс тела, т. е. действие сил *не приводит к ускорениям,* а имеет *статическое проявление.* В таком случае об активных силах можно судить (соответственно измерять силы) по изменению потенциальной энергии материальной точки, по совершенной ими работе. Кроме того, сказанное означает, что такое равномерное движение материальной точки к движению изолированной свободной точки приравнивать не следует, так как в последнем случае превращения энергии не происходит.

12.3. Инфинитное и финитное движения. Знание полной механической энергии материальной точки позволяет высказать важные соображения о движении точки в заданном потенциальном силовом поле. Интеграл энергии запишется равенством $\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) =$

$= E = \text{const}$, из которого скорость точки определяется как функция координат: $v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}$.

Так как скорость должна быть вещественной величиной, то подрадикальное выражение не может быть отрицательным, т. е. должно быть $E - U \geqslant 0$. При $E = U$ имеем уравнение поверхности: $U(x, y, z) = E$, ограничивающей область, за пределы которой материальная точка при движении не выходит. Этот случай относится к движению в конечной области пространства или к *финитному* движению.

В случае же, если $E - U > 0$, движение не ограничено указанной областью пространства, а если размеры области бесконечны, то движение *инфинитно*.

Рассмотрим для примера движение материальной точки в поле с потенциальной энергией, выражаемой формулой (11.17). Здесь

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r} = \text{const}.$$

Если при $r \to \infty$, $v \neq 0$, то движение инфинитное, а условие инфинитности $E \geqslant 0$. При $E < 0$ скорость обращается в нуль на конечных расстояниях от центра и движение финитное.

При финитном движении материальная точка, находясь в ограниченной области пространства, совершает либо *периодическое* движение, как, например, движение планеты по орбите вокруг Солнца, либо *квазипериодическое* движение, при котором возвращения к прежнему положению на пройденном ранее участке траектории не происходит, хотя движущаяся точка через какие-то промежутки времени и проходит вблизи прежних положений. В том и другом случае имеется *характерное время* движения, после истечения которого положения точки в пространстве либо точно, либо приблизительно повторяются. Это время носит название *периода* T финитного движения. Можно считать, что для инфинитного движения $T = \infty$.

12.4. Преобразоваиие энергии материальной точки при переходе от одной инерциальной системы к другой. Можно заметить, что кинетическая энергия материальной точки неинвариантна при преобразованиях Галилея, так как входящая в ее выражение скорость преобразуется по формуле $\vec{v} = \vec{v}_п + \vec{v}'$. Поэтому преобразуется и кинетическая энергия:

$$T' = \frac{mv'^2}{2} = \frac{m(\vec{v} - \vec{v}_п)^2}{2} \neq \frac{mv^2}{2}.$$

Неинвариантна и работа силы, так как преобразуются перемещения

$$d\vec{r} = \vec{v}_п dt + d\vec{r},$$

откуда по формуле для элементарной работы получаем:

$$\delta A = \delta A' + \vec{F}\vec{v}_п dt.$$

Рассмотрим вопрос, преобразуется ли потенциальная энергия материальной точки в силовом поле.

Формально потенциальная энергия в соответствии с ее определением (11.5) есть функция координат, а последние преобразуются. Однако рассмотренные примеры потенциальных сил в § 11 свидетельствуют о том, что при надлежащей нормировке потенциальная энергия оказывается инвариантом преобразований Галилея, так как зависит от некоторого инвариантного расстояния: от точки до поверхности Земли в примере 11.1; от движущейся точки до точки равновесия в примере 11.2; от материальной точки до силового центра в примере 11.3.

При изучении механики системы точек будет показано, что понятие потенциальной энергии тесно связано с механической моделью материальных объектов и дальнодействием: потенциальная энергия есть энергия взаимодействия материальных точек на некоторых расстояниях друг от друга и определяется этими расстояниями, поэтому и является инвариантной величиной.

Рассмотренная в данной главе потенциальная энергия материальной точки в силовом поле по своей природе является частью потенциальной энергии системы точек, что и объясняет ее инвариантность. Вопрос об энергии физического поля, о ее преобразовании в механике не рассматривается, потому что в механической концепции нет места полю как материальному объекту.

Пример 12.1. **Использование интеграла энергии для определения скорости материальной точки.**

Пользуясь интегралом энергии для поля некоторой потенциальной силы, можно, не прибегая к интегрированию, определить скорость движения материальной точки как функцию ее положения (координат) в пространстве. Например, для квазиупругой силы имеем интеграл:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kr^2}{2} = E,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{kr^2}{m}}.$$

В этом движении величина E всегда положительна, поэтому при любом E найдется такое r, что $v = 0$, т. е. движение финитное. Границы области, в которой может находиться точка, определяются условием $r = \sqrt{\frac{2E}{k}}$,

а максимальная скорость будет $v = \sqrt{\frac{E}{m}}$.

Пример 12.2. **Определение скорости при (финитном) движении точки в поле силы тяготения.**

Из интеграла энергии $\frac{mv}{2} - \gamma\frac{m}{r} = E$ имеем: $v = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2\gamma}{r}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{r} - \frac{2|E|}{m}}$, т. е. скорость может изменяться от нулевого значения на расстоянии от центра $r = \frac{\gamma m}{|E|}$ до любого большого значения при приближении к притягивающему центру ($r \to 0$).

Пример 12.3. **Расчет средней кинетической энергии материальной точки, участвующей в финитном движении (за большой промежуток времени).**

Умножим основное уравнение динамики (6.1) скалярно на $\vec{r}$:

$$\frac{dm\vec{v}}{dt}\vec{r} = \vec{F}\vec{r}.$$

Левая часть преобразуется с помощью легко проверяемого тождества:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}\vec{r}) - 2T = \vec{F}\vec{r}. \qquad (а)$$

Все величины, входящие в равенство (а), изменяются с течением времени. Усреднить их — это значит просуммировать мгновенные значения и разделить на время:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{d}{dt}(m\vec{v}\vec{r})dt - 2\bar{T} = \overline{\vec{F}\vec{r}};$$

$$\frac{1}{\tau}m\vec{v}\vec{r}\Big|_0^\tau - 2\bar{T} = \overline{\vec{F}\vec{r}}.$$

Так как $\tau \to \infty$, то первый член равен 0 и

$$\bar{T} = -\frac{\overline{\vec{F}\vec{r}}}{2}. \qquad (б)$$

Величина $\frac{\overline{\vec{F}\vec{r}}}{2}$ называется вириалом силы. Итак, средняя кинетическая энергия определяется как вириал силы.

Пример 12.4. **Вывод соотношения между средней кинетической и потенциальной энергией материальной точки в потенциальном поле.**

Пользуясь формулой (б) примера 12.3 и формулой для потенциальной силы (11.4), имеем:

$$\bar{T} = \frac{1}{2}\overline{\vec{r}\,\mathrm{grad}\,U}. \qquad (в)$$

Рассмотрим поле, потенциальная энергия которого является однородной функцией n-й степени от координаты. По теореме Эйлера для однородных функций $\vec{r}\,\mathrm{grad}\,U = nU$. Для этих полей формула (в) принимает вид:

$$\bar{T} = \frac{n}{2}\bar{U}. \qquad (г)$$

Это важнейшее соотношение широко используется в других разделах физики. В поле квазиупругой силы

$$U = \frac{kr^2}{2} = \frac{k(x^2 + y^2 + z^2)}{2}, \text{ значит, } n = 2 \text{ и } \bar{T} = \bar{U}$$

— *средняя по времени кинетическая энергия равна средней потенциальной.*

В поле силы всемирного тяготения или кулоновской силы $n = -1$, следовательно, $\bar{T} = -\frac{\bar{U}}{2}$ — кинетическая энергия равна половине (модуля) потенциальной.

Пример 12.5. **Расчет работы гироскопической силы.** *Гироскопической* силой называется сила, линейно зависящая от скорости и перпендикулярная скорости. Магнитная составляющая силы Лоренца $\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}(\vec{r})]$ является гироскопической. Работа гироскопической силы всегда равна нулю: $\delta A = \vec{F}d\vec{r} = q[\vec{v}\vec{B}]\vec{v}dt = 0$, так как смешанное произведение, в которое входят два коллинеарных вектора, равно нулю.

Пример 12.6. **Расчет работы диссипативной силы.**

Диссипативной является сила, противоположная по направлению вектору скорости частицы. Это, например, сила вязкого трения: $\vec{F} = -\beta\vec{v}$. *Работа диссипативной силы всегда отрицательна.* В самом деле,

$$\delta A = -\beta\vec{v}d\vec{r} = -\beta v^2 dt.$$

Пример 12.7. **Получение кинематических уравнений из интегралов движения в случае центрально-симметричного поля.**

Для такого поля $U = U(r)$ и имеет место сохранение момента импульса, т. е. движение происходит по плоской траектории. Наиболее удобны поэтому полярные координаты. В них интеграл имеет вид:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E, \qquad (а)$$

а интеграл момента импульса или интеграл площадей можно записать в форме

$$r^2\dot{\varphi} = C. \qquad (б)$$

Исключая из уравнения (а) с помощью уравнения (б) $\dot{\varphi}$ и проводя очевидное преобразование, имеем:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2[E-U(r)]}{m} - \frac{C^2}{r^2}}.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, т. е. оно решается с помощью взятия неопределенного интеграла:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2[E-U(r)]}{m} - \frac{C^2}{r^2}}} + t_0.$$

Полученное равенство выражает кинематический закон движения точки по траектории $r = r(t)$.

Используя уравнение (б) в виде

$$d\varphi = \frac{C}{r^2}dt$$

и подставляя в него найденное dt, получим:

$$\varphi = \int \frac{\frac{C}{r^2}dr}{\sqrt{\frac{2[E-U(r)]}{m} - \frac{C^2}{r^2}}} + \varphi_0,$$

что в принципе может быть сведено к уравнению $\varphi = \varphi(t)$, если $r(t)$ вычислено. Следует заметить, что вычисление интегралов в общем виде при произвольной $U(r)$ невозможно; они далеко не всегда берутся в аналитических функциях и при заданных (даже не слишком сложных) $U(r)$. Однако числовой расчет при современных средствах всегда с необходимой степенью точности можно произвести. Итак, кинематические уравнения $r = r(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$ получены.

Пример 12.8. **Получение кинематических уравнений одномерного движения под действием квазиупругой силы.** Интеграл энергии для квазиупругой силы известен:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E.$$

Очевидное преобразование данного дифференциального уравнения придает ему вид:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2},$$

откуда

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m} x^2}} + \text{const}.$$

Отыскивая данный интеграл в таблицах неопределенных интегралов, имеем:

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\, t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{k}}} + \text{const},$$

откуда

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \alpha\right),$$

т. е. материальная точка испытывает гармоническое колебание с частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и амплитудой $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$. В данном случае α — начальная фаза — должна быть определена из начальных условий.

Методические замечания по важным понятиям динамики. «Инертность», «инерция», «движение по инерции» — эти слова часто употребляются в разговорном языке. В физике инерции и инертности придают определенный смысл. Под *инерцией* понимается явление, состоящее в том, что материальные тела при отсутствии взаимодействий сохраняют неизменным состояние движения или покоя по отношению к инерциальной системе отсчета. Если же тело участвует во взаимодействии, то инерция проявляется в том, что изменение его скорости происходит постепенно, а не мгновенно. Наряду с инерцией говорят об *инертности* как свойстве тел, обусловливающем явление инерции. (Иногда слова «инерция» и «инертность» употребляют в одном и том же смысле — они обозначают указанные выше *свойства* тел.) Масса тел есть физическая величина, характеризующая свойство инертности, мера инертности.

Движение по инерции строго не определяется. Под ним следует понимать явление инерции. Поэтому прежде всего движение по инерции — это движение в отсутствии сил. Кроме того, можно говорить, что тело по инерции продолжает движение, если активные силы отсутствуют, а кинетическая энергия тела уменьшается, рассеиваясь за счет диссипативных сил. Наконец, в случае уравновешивающейся системы сил, т. е. при равнодействующей, равной нулю, также говорят о движении по инерции.

ГЛАВА IV. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

В механике всегда имеют дело с системой материальных точек, взаимодействующих между собой. Однако выше рассматривалось движение одной точки системы, а остальные только создавали силовое поле, в котором и двигалась изучаемая точка. В данной главе изучается движение и взаимодействие всех точек, входящих в систему. Основные понятия и законы динамики системы получаются как обобщения изученных ранее понятий и законов динамики материальной точки.