§ 13. Основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения движения

13.1. Механическая система материальных точек. *Совокупность материальных точек, между которыми имеет место силовое взаимодействие, называется механической системой материальных точек или просто механической системой.* Примером механической системы может служить Солнечная система, твердое тело — неизменяемая система точек и т. д.

Движение системы в механике определено, если известно движение каждой точки.

Система называется *свободной,* если координаты и скорости точек системы могут принимать любые значения в зависимости от сил, приложенных к ним, и начальных условий движения. Если координаты и скорости точек системы удовлетворяют некоторым условиям — связям, то система называется *несвободной.* Связи классифицируются по их аналитическому выражению так же, как и для одной материальной точки. Если связь выражается уравнением, в которое входят только координаты точек, то такая связь называется *голономной, удерживающей* и *стационарной.* Когда в уравнения связей входит время, связи называются *нестационарными,* а когда связи выражены неравенствами, они называются *неудерживающими.* Все остальные связи, уравнения которых задаются дифференциальными неинтегрируемыми уравнениями, называются *неголономными.*

13.2. Внутренние и внешние силы. Замкнутая и изолированная системы. Силы, действующие на точки системы, во многих случаях оказывается полезным подразделять на *внутренние* и *внешние.*

Внутренними называются силы, действующие со стороны одних точек системы и приложенные к другим точкам той же системы. Иначе, *внутренние силы — это силы взаимодействия между точками самой системы.* Как правило, внутренние силы задаются непосредственно как силы попарного взаимодействия между точками. Они зависят только от расстояния между точками, имеют центральный характер и подчиняются третьему закону Ньютона. (Понятие силового поля для внутренних сил не применяется.)

Внешними называются силы, приложенные к точкам системы со стороны тел, не принадлежащих системе, т. е. силы, действующие на систему, находящуюся во внешнем силовом поле.

Указанное подразделение сил на внешние и внутренние определяется выбором самой системы. Одни и те же силы могут быть в одном случае внутренними, а в другом — внешними, в зависимости от того, какие тела включаются в рассматриваемую систему.

Система, в которой действуют только внутренние силы, называется механически замкнутой. В такой системе рассматриваются все взаимодействующие между собой тела. Это значит, что она изолирована от внешних силовых полей. Поэтому в механике говорят о замкнутой или *изолированной* системе.

Однако понятие изолированной системы, если рассматривать не только механику, не эквивалентно замкнутой; все механически взаи-

модействующие части рассматриваемой системы могут быть учтены, но система не изолирована, так как испытывает внешнее, не механическое влияние. Например, в систему поступает энергия при нагревании; система испытывает действие внешнего поля, отнести которое к механическому взаимодействию точек нельзя, и т. д.

Внутренние силы обладают важным свойством: *геометрическая сумма векторов внутренних сил,* приложенных к точкам системы, называемая *главным вектором внутренних сил, равна нулю.* Обозначив через $\vec{F}_i'$ равнодействующую внутренних сил, приложенных к каждой i-й точке системы, имеем:

$$\vec{F}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i' = 0. \qquad (13.1)$$

Это равенство следует из третьего закона Ньютона; внутренние силы сводятся к попарным взаимодействиям точек системы, и на основании формулы (5.8) геометрическая сумма сил взаимодействия равна нулю.

Главный момент внутренних сил, действующих в системе, т. е. геометрическая сумма моментов внутренних сил, приложенных к точкам системы, относительно произвольно выбранной моментной точки, равен нулю. Обозначим $\vec{M}_i'$ момент равнодействующей внутренних сил, приложенных к i-й точке системы. Запишем математическое выражение указанного свойства:

$$\vec{M}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i' = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i \vec{F}_i'] = 0. \qquad (13.2)$$

В справедливости равенства (13.2) убеждаемся, рассматривая геометрическую сумму моментов сил взаимодействия между любой парой точек системы, которая вследствие формулы (5.8) и определения момента (§ 10) всегда будет равна нулю.

13.3. Дифференциальные уравнения движения системы. Условия равновесия. Напишем основные векторные уравнения динамики для n точек системы:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_i', \; i = 1, 2, 3, \ldots, n. \qquad (13.3)$$

В них $\vec{F}_i$ — равнодействующая внешних сил, а $\vec{F}_i'$ — внутренних.

Получили систему из n векторных уравнений. Проецирование этих уравнений на оси декартовых координат приводит к $3n$ дифференциальным скалярным уравнениям движения системы. Эти уравнения позволяют в принципе, как и в динамике точки, решать две основные задачи: определять силы по заданному движению системы и определять движение системы по заданным силам. Но на практике при решении второй задачи динамики системы возникают большие математические трудности и ее точные решения для системы из трех и более материальных точек неизвестны. Поэтому большое значение приобретают общие теоремы динамики системы, позволяющие просто

находить первые интегралы движения, а по ним делать существенные заключения о характере и особенностях движения системы в конкретных случаях.

Но в теоретическом плане уравнения (13.3) исчерпывают вопрос о движении системы точек. По координатам точек системы и их скоростям, известным в некоторый момент времени, с помощью (13.3) определяются координаты и скорости точек во все другие моменты времени. В этом проявляется детерминизм или динамическая предопределенность механического движения.

С помощью уравнений движения (13.3) можно получить условия или *уравнения равновесия* системы материальных точек, перейти от динамики к статике. В состоянии равновесия все точки системы должны покоиться, а это возможно только при отсутствии ускорений, следовательно, $\vec{F}_i + \vec{F}_i' = 0$ — *равнодействующая сил, приложенных к каждой точке, равна нулю.*

Пример 13.1. *Решение системы динамических уравнений для нескольких тел* (изображенных на рис. 13 1).

На тела действуют силы тяжести $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$, направленные вертикально вниз, нормальные силы реакции $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, силы натяжения нити $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ и силы трения $\vec{F}_{T_1}$ и $\vec{F}_{T_2}$. Составим уравнения движения всех тел:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{T_1} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1,$$
$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_3 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{T_2} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2,$$
$$m_3\vec{a}_3 = m_3\vec{g} + \vec{F}_4.$$

Учитывая связи, заключаем, что

$$\vec{N}_1 = -m_1\vec{g},\ \vec{N}_2 = -m_2\vec{g},$$
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2,\ \vec{F}_3 = -\vec{F}_4,\ F_{T_1} = km_1g,\ F_{T_2} = km_2g,$$

а ускорение движения по модулю одинаково для всех тел. Поэтому уравнения движения в проекциях на горизонталь и вертикаль приобретают вид:

$$m_1a = F_1 - km_1g,$$
$$m_2a = F_3 - F_1 - km_2g,$$
$$m_3a = m_3g - F_3$$

Складывая их почленно, получаем:

$a(m_1 + m_2 + m_3) = m_3g - kg(m_1 + m_2)$, отсюда

$$a = \frac{g[m_3 - k(m_1 + m_2)]}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Далее нетрудно найти натяжение нитей F_1 и F_3.

Из этого решения видно, что, чем больше тел и сложнее связи, тем сложнее система уравнений и ее решение. Между тем существуют простые методы решения таких задач. Они рассмотрены в главе VI

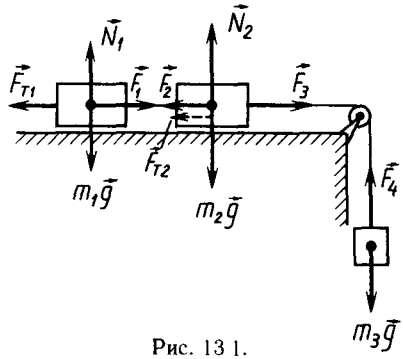

Рис. 13 1.

13.4. Импульс системы. Центр масс. *Импульсом системы материальных точек называется гео-*

метрическая сумма импульсов всех точек системы, т. е.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i. \qquad (13.4)$$

В динамике механических систем применяется понятие *центра масс,* или *центра инерции системы.* Это геометрическая точка, относительно которой масса системы по всем направлениям распределена одинаково. Радиус-вектор центра масс определяется следующей формулой:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \qquad (13.5)$$

т. е. как среднее по массе произведений радиус-векторов точек системы на массы точек.

Здесь m — масса системы, равная сумме масс всех ее точек. Пользуясь этим определением радиус-вектора центра масс, импульсу системы можно придать простой вид, для чего следует продифференцировать обе части (13.5) по времени:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i = m\dot{\vec{r}}_c. \qquad (13.6)$$

Выберем начало новой, штрихованной, системы координат в центре масс системы материальных точек, так что $\vec{r}'_c = 0$, тогда из уравнения (13.5) получаем:

$$\frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}'_i = 0.$$

Отсюда следует, что в этой системе координат, называемой системой центра масс,

$$\vec{p}' = \sum \vec{p}'_i = 0 \qquad (13.7)$$

импульс системы материальных точек в системе отсчета с началом в центре масс равен нулю.

13.5. Момент импульса системы. *Моментом импульса системы материальных точек называется геометрическая сумма моментов импульсов всех точек системы:*

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i [\vec{r}_i \vec{v}_i] \qquad (13.8)$$

Момент импульса материальной точки, как и момент силы, зависит от выбора начала координат, или моментной точки O. Выведем формулу, устанавливающую зависимость между моментами системы относительно двух разных точек O и O' (рис. 13.2). Так как $\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}'_i$, то с помощью формулы (13.8) имеем: $\vec{L} = \vec{L}' + [\vec{r}_0 \vec{p}]$, где $\vec{p}$ — импульс системы. Таким образом, момент импульса не зависит от начала только в частном случае, при $\vec{p} = 0$.

Интересен случай перехода к штрихованной системе координат, начало которой связано с центром масс системы материальных точек и которая движется поступательно в исходной нештрихованной системе. Теперь $\vec{r}_0 = \vec{r}_c$, откуда $\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}'_i$.

Поэтому в соответствии с определением импульса материальной точки

$$\vec{p}_i = m_i\dot{\vec{r}}_c + m_i\dot{\vec{r}}'_i = m_i\dot{\vec{r}}_c + \vec{p}'_i.$$

Подставляя значение $\vec{p}_i$ в формулу (13.8), имеем:

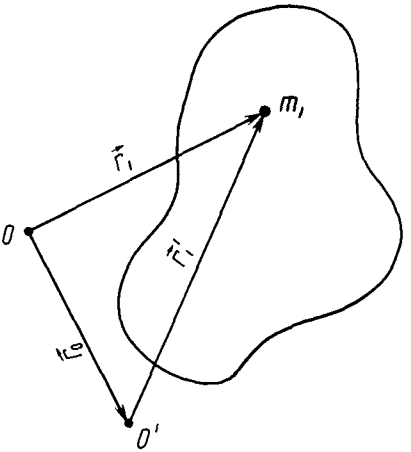

Рис 13 2.

$$L = \sum_i[\vec{r}'_i\,\vec{p}'_i] + \sum_i]\vec{r}_c\vec{p}'_i] + \sum_i[m_i\vec{r}'_i\,\dot{\vec{r}}_c] + \sum_i m_i[\vec{r}_c\dot{\vec{r}}_c].$$

Средние члены обращаются в нуль, так как $\sum m_i r'_i = 0$ по определению центра масс, а $\sum p'_i = 0$ в соответствии с (13.7), и окончательно

$$\vec{L} = \vec{L}' + [\vec{r}_c\,\vec{p}_c]. \qquad (13.9)$$

Таким образом, момент импульса произвольно движущейся системы распадется на момент, *вычисленный в системе центра масс, и момент, выражающий движение системы как целого* (материальной точки с массой $\sum m_i$, движущейся со скоростью $\dot{\vec{r}}_c$). Первое слагаемое в (13.9)

$$\vec{L}' = \sum[\vec{r}'_i\,\vec{p}'_i]$$

может быть названо *собственным моментом* системы. Заметим, что собственный момент системы не зависит от движения системы как целого и является характеристикой внутреннего движения в системе.

13.6. Кинетическая энергия системы. *Кинетическая энергия системы материальных точек — это сумма кинетических энергий всех точек системы:*

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2. \qquad (13.10)$$

При вычислении кинетической энергии системы очень полезной оказывается теорема: *кинетическая энергия системы может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: кинетической энергии поступательного движения системы со скоростью центра масс и кинетической энергии движения системы по отношению к центру масс* (теорема Кенига). Докажем эту теорему

Пусть $\vec{v}_c$ — скорость движения центра масс, $\vec{v}'_i$ — скорость дви-

жения i-й точки по отношению к системе отсчета с началом в центре масс и движущейся поступательно в исходной системе. Тогда по закону сложения скоростей имеем:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i', \; v_i^2 = v_c^2 + (v_i')^2 + 2\vec{v}_c\vec{v}_i'.$$

Делаем подстановку v_i^2 в выражение для кинетической энергии (13.10):

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v_c^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (v_i')^2 + \vec{v}_c \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i'.$$

Последнее слагаемое обращается в нуль на основании (13.7). Окончательно получаем формулу

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (v_i')^2. \qquad (13.11)$$

Здесь первое слагаемое соответствует движению всех точек системы с одинаковыми скоростями $\vec{v}_c$, поэтому и можно назвать его кинетической энергией поступательного движения системы как целого. Второе слагаемое выражает кинетическую энергию движения материальных точек в системе, не зависящую от скорости движения центра масс.

13.7. Потенциальная энергия системы. В § 11 определена потенциальная энергия материальной точки. Как понятие силы, так и понятие потенциальной энергии тесно связано с механической моделью взаимодействия. В рамках этой модели материальные объекты представлены системой материальных точек, действующих друг на друга на расстоянии с некоторыми силами.

Если рассмотреть замкнутую систему материальных точек, то *энергия системы сведется к сумме энергий попарного взаимодействия, зависящих только от расстояний между точками в парах.* Утверждение о суммировании энергии непосредственно вытекает из принципа суперпозиции сил: для потенциальных сил, действующих на любую точку системы со стороны всех остальных, имеем:

$$\vec{F}_j = \sum_{i \neq j} \vec{F}_i = -\sum_{i \neq j} \mathrm{grad}_j U_{i,j} = -\mathrm{grad}_j \sum_{i \neq j} U_{ij},$$

$$\vec{F}_j = -\mathrm{grad}_j U,$$

где

$$U = \sum_{i \neq j} U_{i,j}.$$

Потенциальную энергию замкнутой системы как функцию координат всех ее точек можно записать в более конкретной форме:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n) = \frac{1}{2}\sum\sum_{i \neq j} U_{i,j}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \qquad (13.12)$$

Если система незамкнута, то она рассматривается как находящаяся во внешнем (нестационарном или стационарном) поле. Для системы взаимодействующих точек в нестационарном внешнем поле

имеем общую формулу потенциальной энергии:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t) = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^{n}\sum U_{i,j}(|r_i - r_j|) + \sum_{i}^{n} U_i(r_i, t). \quad (13.13)$$

Если внешнее поле стационарно, энергия от времени не зависит.

В механике рассматриваются также системы материальных точек, находящиеся в непотенциальных полях. Среди них в особый вид выделяются поля с так называемыми обобщенно-потенциальными силами, для которых вводится функция U, зависящая от координат и *скоростей* точек системы,— *обобщенный потенциал*. С помощью этой функции находят силы. Однако обобщенный потенциал не сводится к потенциальной энергии (обобщенно-потенциальные силы рассмотрены ниже, в § 22).

На систему могут быть наложены связи, в том числе неидеальные, а это значит, что точки системы могут испытывать действие диссипативных сил наряду с потенциальными и обобщенно-потенциальными силами. Для непотенциальных и диссипативных сил понятие потенциальной энергии неприменимо.

§ 14. Основные теоремы динамики системы. Законы сохранения

14.1. Теорема об изменении импульса системы. Закон сохранения импульса. Теоремы для системы материальных точек удобно получать, обобщая рассмотренные ранее соответствующие теоремы для одной материальной точки. Теорему об изменении импульса материальной точки в форме (9.1) напишем для каждой i-й точки системы, подразделяя силы на внутренние и внешние:

$$\frac{d}{dt} m_i\vec{v}_i = \vec{F}_i + \vec{F}'_i.$$

Просуммировав уравнения, получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}'_i.$$

Слева под знаком производной стоит импульс системы, а правая часть равенства представляет собой сумму главных векторов внешних и внутренних сил. Но главный вектор внутренних сил по формуле (13.1) равен нулю. Вводя сокращенные обозначения, полученные уравнения перепишем в виде

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}. \quad (14.1)$$

Мы пришли к теореме об изменении импульса системы материальных точек, которую можно сформулировать так: *производная по времени импульса системы равна главному вектору внешних сил, действующих на точки системы.*

Формуле (14.1) можно придать иной вид, если импульс системы по формуле (13.6) выразить через импульс центра масс системы:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}. \quad (14.2)$$

Формулу (14.2) называют теоремой о движении центра масс: *центр масс системы движется как точка, в которой сосредоточена*