

имеем общую формулу потенциальной энергии:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n U_{i,j}(|r_i - r_j|) + \sum_i^n U_i(r_i, t). \quad (13.13)$$

Если внешнее поле стационарно, энергия от времени не зависит.

В механике рассматриваются также системы материальных точек, находящиеся в непотенциальных полях. Среди них в особый вид выделяются поля с так называемыми обобщенно-потенциальными силами, для которых вводится функция U , зависящая от координат и *скоростей* точек системы, — обобщенный потенциал. С помощью этой функции находят силы. Однако обобщенный потенциал не сводится к потенциальной энергии (обобщенно-потенциальные силы рассмотрены ниже, в § 22).

На систему могут быть наложены связи, в том числе неидеальные, а это значит, что точки системы могут испытывать действие диссипативных сил наряду с потенциальными и обобщенно-потенциальными силами. Для непотенциальных и диссипативных сил понятие потенциальной энергии неприменимо.

§ 14. Основные теоремы динамики системы. Законы сохранения

14.1. Теорема об изменении импульса системы. Закон сохранения импульса. Теоремы для системы материальных точек удобно получать, обобщая рассмотренные ранее соответствующие теоремы для одной материальной точки. Теорему об изменении импульса материальной точки в форме (9.1) напишем для каждой i -й точки системы, подразделяя силы на внутренние и внешние:

$$\frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i = \vec{F}_i + \vec{F}'_i.$$

Просуммировав уравнения, получим:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i.$$

Слева под знаком производной стоит импульс системы, а правая часть равенства представляет собой сумму главных векторов внешних и внутренних сил. Но главный вектор внутренних сил по формуле (13.1) равен нулю. Вводя сокращенные обозначения, полученные уравнения перепишем в виде

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}. \quad (14.1)$$

Мы пришли к теореме об изменении импульса системы материальных точек, которую можно сформулировать так: *производная по времени импульса системы равна главному вектору внешних сил, действующих на точки системы.*

Формуле (14.1) можно придать иной вид, если импульс системы по формуле (13.6) выразить через импульс центра масс системы:

$$m \vec{a}_c = \vec{F}. \quad (14.2)$$

Формулу (14.2) называют теоремой о движении центра масс: *центр масс системы движется как точка, в которой сосредоточена*

вся масса системы и к которой приложен главный вектор внешних сил, действующих на точки системы.

Из (14.1) следует закон сохранения импульса системы: если главный вектор внешних сил равен нулю, то вектор импульса системы остается постоянным:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{m} \vec{v}_c = \text{const.} \quad (14.3)$$

Проектируя векторное равенство (14.3) на оси координат, получим *три первых интеграла движения системы*: $\dot{x}_c = C_1$, $\dot{y}_c = C_2$, $\dot{z}_c = C_3$. Эти интегралы, как и для одной материальной точки, могут существовать одновременно все три, два или один.

Для замкнутой механической системы внешние силы отсутствуют, поэтому для замкнутых систем выполняется закон *сохранения импульса*. Центр масс системы движется по инерции, т. е. равномерно и прямолинейно. (Поэтому центр масс и называют иначе *центром инерции*.)

Благодаря указанному свойству движения особое значение приобретает система отсчета с началом в центре масс. Она движется поступательно в исходной инерциальной системе и является инерциальной, а движение материальных точек в ней выглядит проще, нежели в других системах отсчета.

Внутренние силы, действующие в замкнутой системе, могут изменять относительные скорости отдельных материальных точек, но эти изменения всегда будут такими, чтобы общий импульс оставался неизменным по величине и направлению. Это неизменное значение импульса системы определяется начальными условиями движения ее точек.

14.2. Теорема об изменении момента импульса системы. Закон сохранения момента импульса. Теорему об изменении момента импульса для одной материальной точки мы получили в § 10 и кратко выразили уравнением (10.4). В правой части уравнения стоит сумма моментов сил, или момент равнодействующей силы, приложенной к материальной точке.

Теорему об изменении момента импульса мы можем написать для каждой точки, входящей в систему материальных точек. При этом учтем, что силы распадутся на внешние и внутренние. Если теперь ввести краткие обозначения для моментов всех сил, уравнения будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} m_i [\vec{r}_i \vec{v}_i] = \vec{M}_i + \vec{M}'_i.$$

Просуммировав их, получим:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i [\vec{r}_i \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i + \sum_{i=1}^n \vec{M}'_i.$$

Слева под знаком производной стоит момент импульса системы

(13.8), а правая часть равенства представляет главные моменты внешних и внутренних сил. Но главный момент внутренних сил по формуле (13.2) равен нулю, поэтому

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}. \quad (14.4)$$

Мы получили теорему об изменении момента импульса системы материальных точек, которую можно сформулировать так: *производная момента импульса системы по времени равна главному моменту внешних сил, действующих на точки системы.*

Теорема об изменении момента импульса позволяет определить его условия сохранения. Закон сохранения момента импульса гласит: *если геометрическая сумма моментов всех внешних сил, действующих на точки системы, равна нулю, то вектор момента импульса системы остается величиной постоянной:*

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i [\vec{r}_i \vec{v}_i] = \text{const.} \quad (14.5)$$

Для замкнутых систем закон сохранения момента импульса всегда выполняется.

Под влиянием внутренних сил моменты импульса отдельных точек или частей системы изменяются, но эти изменения обязательно компенсируются изменениями моментов импульса других точек и частей той же системы.

Проектируя векторную запись (14.5) закона сохранения момента импульса на оси координат, получим *три первых интеграла движения:*

$$\left\{ \begin{array}{l} L_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = C_4; \\ L_y = \sum_{i=1}^n m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = C_5; \\ L_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = C_6. \end{array} \right. \quad (14.6)$$

Для незамкнутой системы, где момент не сохраняется в целом, одна из проекций главного момента внешних сил может обратиться в нуль. Тогда имеет место один из первых интегралов движения (14.6): сохраняется та проекция момента импульса, для которой обращается в нуль проекция главного момента внешних сил. Например,

$$\frac{dL_x}{dt} = 0, \quad L_x = C_4.$$

При переходе к системе центра масс момент импульса преобразуется по формуле (13.9):

$$\vec{L} = \vec{L}' + [\vec{r}_c \vec{p}_c].$$

Если система замкнута, то последняя формула выражает преобразование момента импульса при переходе от одной инерциальной системы к другой. Обе составляющие момента тогда сохраняются в отдельности.

14.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы. **Закон сохранения полной механической энергии.** Теорему об изменении кинетической энергии для одной материальной точки мы получили в § 12. Напишем теперь уравнение (12.1) этой теоремы для каждой точки системы подробней, выделив в правой части уравнения сумму работ заданных сил и сил реакции:

$$d\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \vec{F}_i d\vec{r}_i + \vec{R}_i d\vec{r}_i.$$

Далее учтем, что для системы заданные силы и силы реакции связей распадаются на внешние и внутренние; покажем это в уравнении

$$d\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \vec{F}_i d\vec{r}_i + \vec{F}'_i d\vec{r}_i + \vec{R}_i d\vec{r}_i + \vec{R}'_i d\vec{r}_i.$$

Просуммировав почленно все n уравнений системы, получим равенство

$$d\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2\right) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}'_i d\vec{r}_i.$$

Под знаком дифференциала в левой части этого равенства стоит кинетическая энергия системы, а правая часть представляет собой сумму элементарных работ заданных сил и сил реакций (внешних и внутренних). Вводя сокращенные обозначения, рассматриваемое равенство перепишем в виде

$$dT = \delta A + \delta A' + \delta A_R + \delta A'_R. \quad (14.7)$$

Мы получили теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек, которую можно сформулировать так: *дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ сил, действующих на точки системы*. При идеальных внешних связях работа внешних сил реакций равна нулю. Если и внутренние связи идеальны, то и работа внутренних сил реакций обращается в нуль. Уравнение теоремы принимает вид:

$$dT = \delta A + \delta A'. \quad (14.8)$$

В отличие от изменения импульса и момента импульса системы при изменении энергии играют роль как внутренние, так и внешние силы — «работают» внешние силы и внутренние, в общем случае как активные, так и неидеальные реакции связей.

Теорема об изменении кинетической энергии позволяет определить условия сохранения полной механической энергии; эти условия названы в законе сохранения энергии: *если все силы, действующие на точки системы, являются потенциальными и стационарными, то полная механическая энергия системы остается величиной постоянной*. Докажем утверждение закона.

Прежде всего заметим, что речь идет либо о свободной системе, либо о системе с идеальными связями, т. е. исходим из формулы (14.8). Если заданные внешние и внутренние силы являются потенциальными и стационарными, то для каждой точки (см. § 11) выполняются условия $\delta A_i = -dU_i - dU'_i$, где U'_i — потенциальная энергия точки в поле системы, а U_i — во внешнем поле.

Тогда для системы материальных точек элементарная работа внешних сил может быть вычислена:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \delta A_i = -d \sum_{i=1}^n U_i(\vec{r}_i) = -dU(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n),$$

где U — потенциальная энергия системы во внешнем силовом поле.

Внутри системы на каждую точку действуют потенциальные силы со стороны всех остальных, причем их равнодействующая находится как градиент (по координатам данной точки) от потенциальной энергии системы, определяемой формулой (13.12). Отсюда следует, что работа, совершаемая внутренними силами над i -й точкой, выражается формулой $\delta A'_i = -\text{grad}_i U' d\vec{r}_i$. Суммируя элементарные работы по всем точкам системы, получаем:

$$\delta A' = -\sum_i \text{grad}_i U' d\vec{r}_i = -dU'.$$

Найденные выражения элементарных работ подставим в уравнение теоремы об изменении энергии (14.8): $dT = -dU - dU'$, откуда и имеем:

$$dT + dU + dU' = 0, \quad T + U + U' = \text{const.} \quad (14.9)$$

Мы получили закон сохранения полной механической энергии системы в случае потенциальных сил, причем полная механическая энергия равна сумме энергий кинетической, внешней потенциальной и внутренней потенциальной:

$$E = T + U + U'. \quad (14.10)$$

Закон сохранения полной механической энергии (14.9) выражает *первый интеграл движения, называемый интегралом энергии*.

Для замкнутой системы с потенциальными силами (свободной или с идеальными связями) полная механическая энергия сохраняется:

$$E = T + U' = \text{const.} \quad (14.11)$$

Кинетическая энергия системы материальных точек может быть представлена по теореме Кенига (13.11) в виде суммы энергии поступательного движения $\frac{1}{2}mv_c^2$ и энергии внутреннего движения $\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$. В соответствии с этим в полной механической энергии системе, определяемой формулой (14.10), можно выделить *внутреннюю механическую энергию*, представляющую собой сумму энергий

внутренней кинетической и внутренней потенциальной:

$$E_{\text{вн}} = T' + U'. \quad (14.12)$$

Внутренняя механическая энергия системы в общем случае не сохраняется, но для замкнутой системы с потенциальными силами сохранение имеет место, так как постоянна полная энергия (14.11) и постоянна ее часть — энергия поступательного движения.

В заключение заметим, что системы с сохраняющейся полной механической энергией называются **консервативными**.

Пример 14.1. Применение закона сохранения импульса для вывода уравнения движения материальной точки переменной массы.

Основной принцип реактивного движения общеизвестен: в реактивном двигателе сгорает топливо и продукты горения с большой относительной скоростью выбрасываются назад, а сам двигатель при этом отталкивается вперед. Однако непосредственное применение законов Ньютона в задаче о движении ракеты при определении ее кинематических параметров приводит к неразрешимой проблеме многих тел. Используем для составления уравнения движения ракеты законы изменения и сохранения импульса.

При движении ракеты ее масса убывает и ракету можно рассматривать как материальную точку переменной массы, на которую действует реактивная сила, являющаяся результатом взаимодействия ракеты с выбрасываемыми газами. Допустим, $M(t)$ — масса точки, являющаяся непрерывной (убывающей) функцией времени. Пусть за dt секунд точка испускает частицу бесконечно малой массы $-dM > 0$ со скоростью \vec{U} по отношению к неподвижной системе координат. Ввиду того что испускание частицы представляет процесс, при котором возникают только внутренние силы в системе точка — испущенная частица, общий импульс системы при этом не изменяется. Импульс системы до испускания $M\vec{v}$, где \vec{v} — скорость ракеты до испускания частицы. После испускания импульс системы будет равен: $-dM\vec{u} + (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v})$. Приравнивая эти выражения импульса, по закону сохранения получаем: $M\vec{v} = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - dM\vec{u}$.

Бесконечно малой величиной второго порядка малости $dM\vec{v}$ пренебрегаем и приходим к равенству $M\vec{v} = dM(\vec{u} - \vec{v})$.

После деления обеих частей равенства на элемент времени получаем уравнение:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dM}{dt} (\vec{u} - \vec{v}).$$

Сравнение последнего уравнения с основным уравнением динамики материальной точки (вторым законом Ньютона) позволяет рассматривать правую часть его как выражение реактивной силы, приложенной к точке переменной массы. Заметим, что разность $(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v}_r$, есть скорость истечения газов относительно ракеты, т. е. реактивная сила выражается формулой:

$$\vec{\Phi}_r = \frac{dM}{dt} \vec{v}_r.$$

Если на точку переменной массы действует еще некоторая внешняя сила \vec{F} , то ее следует добавить к правой части уравнения, и тогда приходим к уравнению Мещерского:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi}_r,$$

которое выражает основной закон движения точки переменной массы.

Пример 14.2. Применение уравнения Мещерского в задаче Циолковского.

Пусть точка переменной массы (ракета) движется в безвоздушном пространстве под влиянием только реактивной силы, причем относительная скорость истечения

частиц постоянна и направлена противоположно скорости \vec{v} ракеты. Требуется определить скорость \vec{v} и пройденное точкой расстояние. Такова задача Циолковского.

Дифференциальное уравнение, выведенное в предыдущем примере, в данном случае запишется следующим образом:

$$M \frac{dv}{dt} = -v, \frac{dM}{dt}.$$

После разделения переменных имеем:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dM}{M}.$$

Если зависимость массы точки от времени известна: $M = M_0 f(t)$, то можно дифференциальное уравнение проинтегрировать; получаем: $v = -v_0 \ln f + C_1$. Пусть начальные условия таковы: $v|_{t=0} = v_0$, $f|_{t=0} = 1$. Тогда закон изменения скорости выражается формулой

$$v = v_0 - v_0 \ln f = v_0 + v_0 \ln \frac{M_0}{M}.$$

Так как запас топлива в ракете ограничен, то процесс выбрасывания частиц продолжается в течение конечного промежутка времени на участке траектории, называемом активным. Определим скорость в конце активного участка.

Обозначим m массу топлива и M_s массу ракеты, т. е. $M_0 = M_s + m$. Тогда для скорости в конце активного участка при начальной $v_0 = 0$ получим следующее выражение:

$$v_1 = v_0 \ln \left(\frac{M_s + m}{M_s} \right) = v_0 \ln \left(1 + \frac{m}{M_s} \right).$$

Отсюда следуют важные выводы: скорость точки в конце активного участка пропорциональна относительной скорости выбрасывания частиц; скорость точки в конце активного участка возрастает при увеличении отношения массы топлива к массе ракеты (это отношение называют числом Циолковского); скорость точки в конце активного участка не зависит от скорости горения топлива.

Пример 14.3. Упругое соударение двух частиц.

При упругом соударении сохраняются импульс и энергия системы. Рассмотрим столкновение частиц. Задача состоит в нахождении скоростей после столкновения по известным скоростям до столкновения. Проще всего рассматривать столкновение частиц в системе координат, где центр масс соударяющихся частиц покоится.

Пусть массы частиц m_1 и m_2 , их скорости в некоторой системе координат (неподвижной, лабораторной) до столкновения равны \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . Тогда центр масс частиц в этой системе движется со скоростью

$$\vec{v}_c = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Скорости частиц до столкновения в системе координат, в которой центр масс покоится, можно найти, если из скоростей частиц в лабораторной системе вычесть скорость центра масс. Обозначим скорости частиц относительно центра масс до столкновения соответственно $\vec{v}_{0,1}$ и $\vec{v}_{0,2}$. Для них имеем следующие выражения:

$$\vec{v}_{0,1} = \vec{v}_1 - \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2),$$

$$\vec{v}_{0,2} = \vec{v}_2 - \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2).$$

Как и следовало ожидать, величины относительных скоростей обратно пропорциональны массам частиц, а направления их прямо противоположны (в системе центра масс импульс системы двух частей равен нулю). После столкновения скорости, изменив направления, останутся противоположными. При упругом столкновении сохраняется кинетическая энергия, поэтому не изменяются и абсолютные величины относительных скоростей. Обозначим через \vec{n} единичный вектор в направлении скорости первой частицы после столкновения. Тогда относительные скорости частиц после

столкновения будут иметь следующие значения:

$$\vec{v}'_{0,1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n}, \quad \vec{v}'_{0,2} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n}.$$

Для получения скоростей частиц после столкновения в лабораторной системе координат к этим выражениям нужно добавить скорость центра масс. Таким образом, получаем окончательные выражения для скоростей частиц после столкновения:

$$\begin{aligned}\vec{v}'_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n} + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \\ \vec{v}'_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n} + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.\end{aligned}$$

Задача решена — скорости частиц после столкновения найдены. Однако ответ многозначен, так как направление вектора \vec{n} не определяется из законов сохранения, оно зависит от закона взаимодействия частиц и их взаимного расположения во время столкновения.

Пример 14.4. Работа при механическом ударе.

Умножим почленно основное уравнение удара (пример 9.1) на \vec{v}_2 и \vec{v}_1 и получим:

$$mv_2^2 - mv_1 v_2 = \vec{K} \vec{v}_2, \quad mv_2 v_1 - mv_1^2 = \vec{K} \vec{v}_1.$$

Суммируя полученные равенства почленно и применяя теорему об изменении кинетической энергии, найдем работу, совершающую при ударе:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \vec{K} \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}.$$

Итак, работа, совершаемая при ударе, равна скалярному произведению ударного импульса на полусумму начальной и конечной скоростей.

§ 15. Задача двух тел

15.1. Приведенная масса. Ранее (§ 13) рассматривались уравнения динамики системы материальных точек. При этом указывалось, что решение их встречает для многих точек непреодолимые математические трудности. Действительно, точного решения системы уравнений (13.3) для произвольных сил не найдено уже в случае трех материальных точек, поэтому важна задача о замкнутой системе двух точек, называемая задачей двух тел. Она имеет простое и исчерпывающее решение — сводится к основной задаче динамики одной материальной точки. Решение задачи двух тел используется в небесной механике, описывающей движение планет и их спутников в Солнечной системе, в задачах на столкновение частиц, в статистической физике и других вопросах.

Рассмотрим замкнутую систему двух материальных точек, взаимодействующих между собой. Как было установлено (§ 14), центр масс этой системы движется равномерно и прямолинейно (или покоятся). Задача просто решается в системе с началом в центре масс, движущейся поступательно (такая система называется Ц-системой).

Обозначим массы частиц через m_1 и m_2 , их радиус-векторы, проведенные от центра масс, соответственно \vec{r}_1 и \vec{r}_2 (рис. 15.1). Пусть \vec{r} — вектор, проведенный от точки m_2 к m_1 . Из определения радиус-вектора центра масс имеем: $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$.