столкновения будут иметь следующие значения:

$$\vec{v}'_{0,1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n}, \quad \vec{v}'_{0,2} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n}.$$

Для получения скоростей частиц после столкновения в лабораторной системе координат к этим выражениям нужно добавить скорость центра масс. Таким образом, получаем окончательные выражения для скоростей частиц после столкновения:

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n} + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n} + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Задача решена — скорости частиц после столкновения найдены. Однако ответ многозначен, так как направление вектора $\vec{n}$ не определяется из законов сохранения, оно зависит от закона взаимодействия частиц и их взаимного расположения во время столкновения.

Пример 14.4. **Работа при механическом ударе.**

Умножим почленно основное уравнение удара (пример 9.1) на $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_1$ и получим:

$$m\vec{v}_2^2 - m\vec{v}_1\vec{v}_2 = \vec{K}\vec{v}_2, \quad m\vec{v}_2\vec{v}_1 - m\vec{v}_1^2 = \vec{K}\vec{v}_1.$$

Суммируя полученные равенства почленно и применяя теорему об изменении кинетической энергии, найдем работу, совершаемую при ударе:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \vec{K}\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}.$$

Итак, работа, совершаемая при ударе, равна скалярному произведению ударного импульса на полусумму начальной и конечной скоростей.

## § 15. Задача двух тел

**15.1. Приведенная масса.** Ранее (§ 13) рассматривались уравнения динамики системы материальных точек. При этом указывалось, что решение их встречает для многих точек непреодолимые математические трудности. Действительно, точного решения системы уравнений (13.3) для произвольных сил не найдено уже в случае трех материальных точек, поэтому важна задача о замкнутой системе двух точек, называемая задачей двух тел. Она имеет простое и исчерпывающее решение — сводится к основной задаче динамики одной материальной точки. Решение задачи двух тел используется в небесной механике, описывающей движение планет и их спутников в Солнечной системе, в задачах на столкновение частиц, в статистической физике и других вопросах.

Рассмотрим замкнутую систему двух материальных точек, взаимодействующих между собой. Как было установлено (§ 14), центр масс этой системы движется равномерно и прямолинейно (или покоится). Задача просто решается в системе с началом в центре масс, движущейся поступательно (такая система называется Ц-системой).

Обозначим массы частиц через $m_1$ и $m_2$, их радиус-векторы, проведенные от центра масс, соответственно $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ (рис. 15.1). Пусть $\vec{r}$ — вектор, проведенный от точки $m_2$ к $m_1$. Из определения радиус-вектора центра масс имеем: $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$.

Непосредственно из рисунка следует соотношение между радиус-векторами:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}. \qquad (15.1)$$

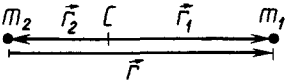

Рис. 15.1.

Два последних равенства позволяют выразить радиус-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ через вектор $\vec{r}$, соединяющий точки $m_2$ и $m_1$. Имеем:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}. \qquad (15.2)$$

Напишем теперь основные уравнения для движения обеих точек в Ц-системе:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{2,1}(r), \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 = F_{1,2}(r). \end{cases} \qquad (15.3)$$

Но пока что мы значительно не продвинулись в решении задачи двух тел, так как силы в уравнениях (15.3) зависят от расстояния между точками, а не от расстояния до центра масс, т. е. решать уравнения (15.1) отдельно для каждой точки нельзя. Однако именно в задаче двух тел эти трудности устраняются.

Пользуясь вышенаписанными выражениями для радиус-векторов (15.2), исключим из основных уравнений (15.3) $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Получаем уравнения движения:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2,1}(r),$$
$$-\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{1,2}(r).$$

Ввиду того что по третьему закону Ньютона $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$, оба уравнения становятся тождественными, и движение системы двух точек в результате их взаимодействия эквивалентно движению одной точки в соответствии с уравнением

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r). \qquad (15.4)$$

Уравнение (15.4) отличается от известного уравнения движения материальной точки в поле заданной силы (6.1) только тем, что вместо массы $m$ здесь выступает комбинация масс двух точек:

$$m' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (15.5)$$

Величина $m'$ называется *приведенной массой*.

Итак, задача двух тел свелась к задаче о движении одной материальной точки с приведенной массой в Ц-системе под действием центральной силы; уравнение движения имеет обычный вид:

$$m'\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r). \qquad (15.6)$$

Но при использовании результатов решения уравнения (15.6) необходимо помнить, что точка $m'$, движущаяся на конце радиус-вектора $\vec{r}$ под действием силового центра в начале координат Ц-системы, является не реальной, а изображающей движение системы. От ее движения, после того как уравнение (15.6) проинтегрировано, следует переходить к реальному движению двух материальных точек $m_1$ и $m_2$.

**15.2. Движение двух материальных точек в системе центра масс.** Движение изображающей точки в соответствии с уравнением (15.6) будет плоским, так как сила центральная (§ 10.3). Пусть кинематическое уравнение движения найдено: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. В таком случае с помощью формулы (15.2) находим и кинематические уравнения движения обеих материальных точек в Ц-системе:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}(t),\ \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}(t). \qquad (15.7)$$

Очевидно, что траектории движения изображающей точки и точек $m_1$ и $m_2$ будут подобными кривыми относительно центра масс, а отношение подобия есть обратное отношение масс, т. е.

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}. \qquad (15.8)$$

Нетрудно найти и скорости движения точек. Дифференцируя (15.7) по времени, имеем:

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v};\ \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}. \qquad (15.9)$$

Задача двух тел решена.

Пример 15.1. **Движение тел одинаковой массы.**
Траектория движения изображающей точки есть окружность. Поскольку в этом случае

$$m' = \frac{m}{2},\ \vec{r}_1 = -\vec{r}_2 = \frac{\vec{r}}{2},\ \vec{v}_1 = -\vec{v}_2 = \frac{\vec{v}}{2},$$

то картина движения материальных точек и изображающей точки соответствует рисунку 15.2.

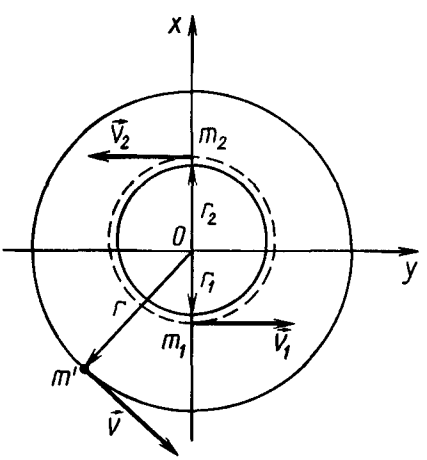

Рис. 15.2.

Пример 15.2. **Движение точек по эллиптическим орбитам.** При одинаковых массах $m_1 = m_2$ и различных, т. е. $m_2 > m_1$, траектории движения показаны на рисунках 15.3 и 15.4.

Пример 15.3. **Перевод решения задачи двух тел в лабораторную систему.** Пусть скорость движения центра масс замкнутой системы двух материальных точек известна в некоторой неподвижной системе координат — лабораторной. В таком случае, решив задачу в Ц-системе, все результаты можно перевести в Л-систему. По формулам (3.1) и (3.6) имеем:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{v}_0 t + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}(t),$$

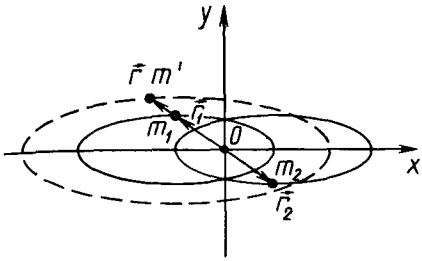


Рис. 15.3.

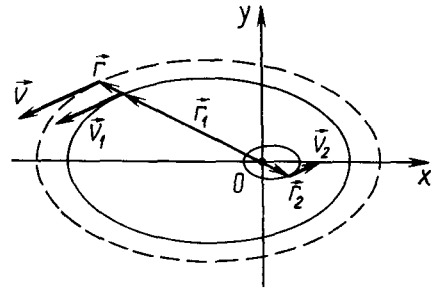


Рис. 15.4.

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v};\ \vec{r}_2(t) = \vec{v}_0 t - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}(t),\ \vec{v}_2 = \vec{v}_0 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}.$$

Пример 15.4. **Энергия замкнутой системы (консервативной) двух точек.** Кинетическая энергия системы может быть преобразована к энергии изображающей точки. Используя формулу (15.9), получаем:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1 v_2^2}{2} = \frac{m_1 m_2^2 v^2}{2(m_1+m_2)^2} + \frac{m_1^2 m_2 v^2}{2(m_1+m_2)} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v^2 = \frac{m' v^2}{2}.$$

Таким образом, полная энергия системы будет

$$E = \frac{m' v^2}{2} + U(r).$$

Она выражается через приведенную массу системы.

Пример 15.5. **Момент импульса системы двух точек.** Запишем момент импульса системы:

$$\vec{L} = m_1[\vec{r}_1\vec{v}_1] + m_2[\vec{r}_2\vec{v}_2].$$

Внесем сюда выражения $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ через вектор $\vec{r}$, выражающийся формулой (15.7), и получим равенство

$$\vec{L} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}[\vec{r}\vec{v}_1] - \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}[\vec{r}\vec{v}_2] = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}[\vec{r}[\vec{v}_1 - \vec{v}_2]].$$

Но вектор $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ есть скорость $\vec{v}'$ первой частицы относительно второй или скорость изображающей точки $\vec{v}$, и окончательный результат выражается равенством

$$\vec{L} = m'[\vec{r}\vec{v}].$$

Это собственный момент; он сохраняется.

Из приведенных примеров видно, как задача о движении двух тел сводится к задаче о движении одной точки под действием заданной силы. Особую роль при этом играет приведенная масса системы, через нее выражаются и основные динамические параметры системы — энергия, импульс, момент импульса.

## ГЛАВА V. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Под *абсолютно твердым* телом в механике понимают *систему, состоящую из материальных точек с неизменными расстояниями между ними.* При моделировании реальных тел такой системой точек конечный объем тела $V$ разбивается на элементарные объемы $dV$, а все тело мысленно — на совокупность бесконечно малых тел (мате-

риальных точек) с массами $dm = \rho dV$, где $\rho$ — плотность тела. Таким образом, твердое тело рассматривается как непрерывная система материальных точек, число которых бесконечно в конечном объеме тела.

Каких-либо предположений о структуре тела, взаимодействии частиц тела между собой не делается, кроме одного: расстояния между двумя любыми точками тела не изменяются, как бы ни двигалось тело и какие бы силы на него ни действовали. Это означает сохранение его формы и размеров, т. е. полное отсутствие деформаций.

Известно, что реальные твердые тела деформируются. Использование модели абсолютно твердого тела исключает рассмотрение деформаций реальных тел в данном разделе механики.

Любое реальное твердое тело состоит из атомов и молекул, взаимодействующих между собой и движущихся определенным образом. Этим взаимодействием и движением в конечном счете определяются все свойства тела — плотность, твердость, упругость, прочность, сохранение неизменной формы тела. В модели твердого тела не учитывают все другие свойства реального тела, кроме абсолютизированной неизменности форм — жесткости тела и плотности его.

О неизменности расстояний между точками в твердом теле можно говорить как о связях жесткости, наложенных на точки, ограничивающих число степеней свободы тела до шести (§ 2). Однако понятие связи здесь в полной мере не применяется, так как реакции этих связей не рассматриваются.

В данной теме изучается динамика твердого тела, где применяются общие теоремы динамики системы точек к частному случаю системы с неизменными расстояниями между точками, устанавливаются законы движения, характерные для тела. При изучении главы необходимо опираться на кинематику движения твердого тела, изложенную в курсе ранее.

## § 16. Момент инерции

**16.1. Момент инерции. Теорема Штейнера.** В вопросах динамики важную роль играют инертные свойства тел. При поступательном движении инертные свойства тела полностью определяются массой тела. Для вращательного движения самое существенное значение имеет распределение массы по объему твердого тела. Инертные свойства твердого тела во вращательном движении определяются новой величиной — моментом инерции. *Моментом инерции $I_s$ тела относительно оси s называют сумму произведений отдельных элементов $dm$ массы тела на квадраты их расстояний до оси* (рис. 16.1):

$$I_s = \int_V R^2 dm = \int_V R^2 \rho dV, \qquad (16.1)$$

где $\rho$ — объемная плотность тела.

По теореме о среднем из интегрального исчисления для момента