риальных точек) с массами $dm = \rho dV$, где ρ — плотность тела. Таким образом, твердое тело рассматривается как непрерывная система материальных точек, число которых бесконечно в конечном объеме тела.

Каких-либо предположений о структуре тела, взаимодействии частиц тела между собой не делается, кроме одного: расстояния между двумя любыми точками тела не изменяются, как бы ни двигалось тело и какие бы силы на него ни действовали. Это означает сохранение его формы и размеров, т. е. полное отсутствие деформаций.

Известно, что реальные твердые тела деформируются. Использование модели абсолютно твердого тела исключает рассмотрение деформаций реальных тел в данном разделе механики.

Любое реальное твердое тело состоит из атомов и молекул, взаимодействующих между собой и движущихся определенным образом. Этим взаимодействием и движением в конечном счете определяются все свойства тела — плотность, твердость, упругость, прочность, сохранение неизменной формы тела. В модели твердого тела не учитывают все другие свойства реального тела, кроме абсолютизированной неизменности форм — жесткости тела и плотности его.

О неизменности расстояний между точками в твердом теле можно говорить как о связях жесткости, наложенных на точки, ограничивающих число степеней свободы тела до шести (§ 2). Однако понятие связи здесь в полной мере не применяется, так как реакции этих связей не рассматриваются.

В данной теме изучается динамика твердого тела, где применяются общие теоремы динамики системы точек к частному случаю системы с неизменными расстояниями между точками, устанавливаются законы движения, характерные для тела. При изучении главы необходимо опираться на кинематику движения твердого тела, изложенную в курсе ранее.

§ 16. Момент инерции

16.1. Момент инерции. Теорема Штейнера. В вопросах динамики важную роль играют инертные свойства тел. При поступательном движении инертные свойства тела полностью определяются массой тела. Для вращательного движения самое существенное значение имеет распределение массы по объему твердого тела. Инертные свойства твердого тела во вращательном движении определяются новой величиной — моментом инерции. *Моментом инерции I_s тела относительно оси s называют сумму произведений отдельных элементов dm массы тела на квадраты их расстояний до оси* (рис. 16.1):

$$I_s = \int_V R^2 dm = \int_V R^2 \rho dV, \qquad (16.1)$$

где ρ — объемная плотность тела.

По теореме о среднем из интегрального исчисления для момента

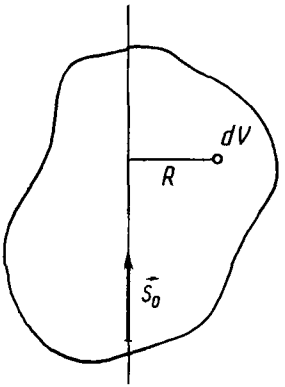

Рис. 16 1.

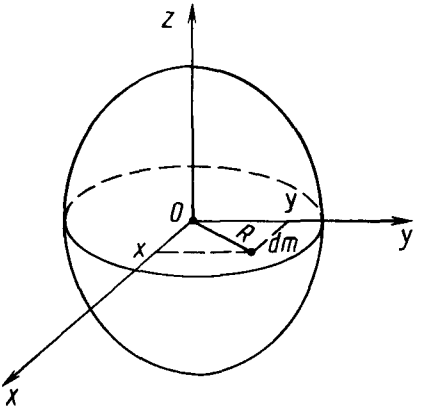

Рис. 16.2.

инерции можно написать после вынесения из-под знака интеграла среднего значения подынтегральной функции следующее выражение:

$$I_s = \overline{R}^2 \int_V dm = \overline{R}^2 m. \qquad (16.2)$$

Среднее значение квадратов расстояний элементов массы до данной оси называют *квадратом плеча* или *радиусом инерции тела.*

Моменты инерции тела относительно осей произвольно выбранной декартовой системы координат (рис. 16.2) соответственно обозначим $I_{xx} = I_{11}$; $I_{yy} = I_{22}$; $I_{zz} = I_{33}$. Они имеют выражения

$$\begin{cases} I_{xx} = \int\limits_V (y^2 + z^2)\, dm, \\ I_{yy} = \int\limits_V (z^2 + x^2)\, dm, \\ I_{zz} = \int\limits_V (x^2 + y^2)\, dm. \end{cases} \qquad (16.3)$$

Отметим следующие свойства моментов инерции тела относительно координатных осей.

Сумма моментов инерции относительно каких-либо двух осей больше момента инерции относительно третьей оси: $I_{xx} + I_{yy} - I_{zz} \geqslant 0$. Действительно,

$$I_{xx} + I_{yy} - I_{zz} = \int\limits_V 2z^2\, dm \geqslant 0.$$

Если изобразить величины моментов инерции тела относительно координатных осей отрезками прямых соответствующей длины, то из них можно построить треугольник.

Сумма моментов инерции тела относительно любых трех взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через данную точку, есть величина постоянная, не зависящая от направления прямых. В самом деле,

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\int\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dm = 2H,$$

где величина

$$H = \int_V (x_2 + y^2 + z^2)\, dm$$

называется *полярным моментом инерции* тела относительно начала координат и является постоянной.

Из приведенных определений следует, что момент инерции зависит от выбора оси, по отношению к которой он берется. Исследуем, как изменяется момент инерции тела при изменении положения оси.

Связь между моментами инерции относительно параллельных осей устанавливается теоремой Штейнера: *момент инерции тела I_s относительно данной оси равен моменту инерции I_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями,* что выражается равенством

$$I_s = I_c + md^2. \qquad (16.4)$$

Для доказательства совместим ось Oz с осью s, а ось Ox направим так, чтобы она пересекала параллельную ось, проходящую через центр масс (рис. 16.3). Обозначим R и R_c — расстояния от какого-либо элемента массы dm соответственно до оси s и оси, проходящей через центр масс. По определению имеем:

$$I_s = \int_V R^2 dm,$$

$$I_c = \int_V R_c^2 dm.$$

Из косоугольного треугольника имеем:

$$R_c^2 = R^2 + d - 2d\, R\cos\alpha.$$

Делаем подстановку в выражение I_c и получаем: $I_c = I_s + md^2 - 2d\int_V x dm$.

По определению координат центра масс твердого тела как непрерывной системы точек dm с помощью формулы (13.5) имеем: $\int_V x dm = mx_c$. Окончательно получаем: $I_c = I_s + md^2 - 2md^2$, $I_s = I_c + md^2$.

Теорема доказана. На основании теоремы Штейнера заключаем, что моменты инерции тела относительно осей, проходящих через центр масс, являются *наименьшими* по сравнению с моментами относительно других, параллельных им осей.

16.2. Зависимость момента инерции от направления оси. Переходим к изучению зависимости момента инерции тела относительно оси, проходящей через заданную точку тела, от направления оси. Помещаем в данной точке начало координат прямоугольной декартовой системы. Тогда положение оси определяется значениями ее трех направляющих косинусов, которые обозначим соответственно

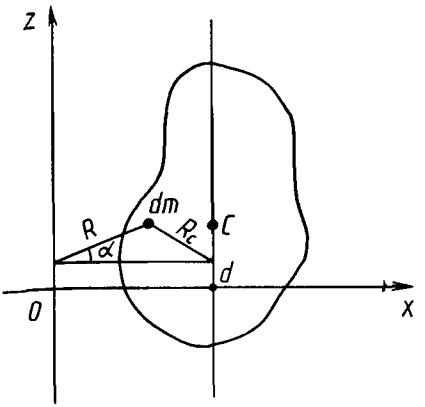

Рис 16 3.

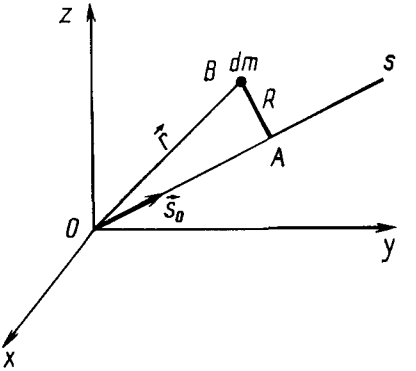

Рис 16.4

α, β и γ. Задача состоит в нахождении момента инерции I_s как функции направляющих косинусов. Из треугольника OAB (рис. 16.4) для квадрата расстояния элемента массы dm от оси Os имеем следующее выражение: $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (OA)^2$, где OA — проекция радиус-вектора элемента массы dm на направление оси Os. Представив радиус-вектор разложением по ортам, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, и проецируя полученную векторную сумму на Os, получим: $OA = x\alpha + y\beta + z\gamma$.

Производим дальнейшие тождественные преобразования выражения для квадрата расстояния R^2:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\alpha + y\beta + z\gamma)^2 =$$
$$= (y^2 + z^2)\alpha^2 + (x^2 + z^2)\beta^2 + (x^2 + y^2)\gamma^2 - 2yz\beta\gamma -$$
$$- 2xz\alpha\gamma - 2xy\alpha\beta.$$

При преобразовании использовано условие, которому удовлетворяют направляющие косинусы: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Вносим найденное выражение квадрата расстояния R^2 в выражение момента инерции и получаем:

$$I_s(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2\int_V (y^2 + z^2)\,dm + \beta^2\int_V (x^2 + z^2)\,dm +$$
$$+ \gamma^2\int_V (x^2 + y^2)\,dm - 2\beta\gamma\int_V yz\,dm - 2\alpha\gamma\int_V xz\,dm - 2\alpha\beta\int_V xy\,dm.$$

Коэффициенты при квадратах направляющих косинусов — моменты инерции тела относительно координатных осей. Постоянные величины

$$I_{2,3} = I_{y,z} = -\int_V yz\,dm;\ I_{1,3} = I_{x,z} = -\int_V xz\,dm;$$
$$I_{1,2} = I_{xy} = -\int_V xy\,dm$$

имеют одинаковую с моментами инерции размерность. Они получили

название *произведений инерции* тела или *центробежных моментов* инерции. Окончательный результат оказывается следующим:

$$I_s = I_{1,1}\alpha^2 + I_{2,2}\beta^2 + I_{3,3}\gamma^2 + 2I_{2,3}\beta\gamma + 2I_{1,3}\alpha\gamma + 2I_{1,2}\alpha\beta. \quad (16.5)$$

Момент инерции является однородной квадратичной функцией направляющих косинусов оси. Формула (16.5) позволяет определить его относительно любой оси, проходящей через заданную точку, если известны все шесть величин $I_{i,k}(i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$. Эти величины играют роль своеобразных составляющих момента инерции в данной системе координат. Отсюда следует, что, не являясь вектором, эта величина не является и скаляром. Она принадлежит к *тензорным* величинам.

Для нахождения зависимости момента инерции тела от направления оси, проходящей через некоторую точку O, выполним следующее мысленное построение. От точки O по оси Os, момент инерции относительно которой равен I_s, отложим отрезок прямой длиной

$$r = \frac{1}{\sqrt{I_s}} \quad (16.6)$$

и найдем геометрическое место концов этих отрезков, отложенных по всевозможным направлениям. Замечая, что координаты конца отрезка выражаются через направляющие косинусы равенствами $x = r\alpha$, $y = r\beta$, $z = r\gamma$, после подстановки в формулу (16.6) значения момента инерции из (16.5) получаем уравнение геометрического места точек:

$$I_s r^2 = I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2I_{yz}yz + \\ + 2I_{zz}zz + 2I_{xy}xy = 1.$$

Это уравнение второго порядка может быть только уравнением эллипсоида, так как в соответствии с (16.6) у поверхности нет бесконечно удаленной точки. Полученный эллипсоид инерции дает наглядное представление о значениях моментов инерции тела для различных осей, проходящих через точку O (рис. 16.5). Отметим еще раз, что коэффициентами в уравнении эллипсоида служат моменты и произведения инерции тела относительно осей координатной системы, в которой записано уравнение. Отсутствие в уравнении линейных членов указывает, что начало координат совпадает с центром эллипсоида. Наличие в уравнении членов с произведениями координат обусловлено несовпадением осей с полуосями эллипсоида. Если произвести преобразование координат, повернув оси координат до совпадения с полуосями эллипсоида, коэффициенты при произведениях координат обратятся в нули и каноническое уравнение эллип-

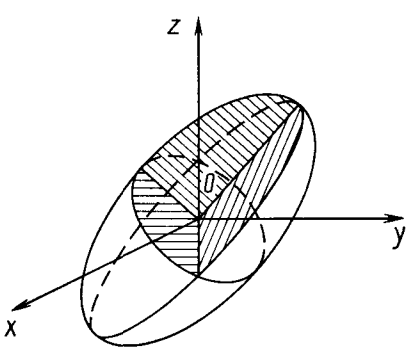

Рис. 16.5.

соида по отношению к этим осям будет иметь вид:

$$I_{x'x'}x'^2 + I_{y'y'}y'^2 + I_{z'z'}z'^2 = 1.$$

Коэффициенты $I_{x'x'}$, $I_{y'y'}$, $I_{z'z'}$ — моменты инерции тела по отношению к новым осям координат x', y', z'. Оси симметрии эллипсоида инерции называются *главными осями инерции* тела для данной точки. *Главные оси инерции — это три взаимно перпендикулярных направления, проходящие через данную точку, относительно которых моменты инерции тела имеют экстремальные значения* (минимальное для направления большой оси эллипсоида, максимальное — для малой оси и минимум-максимум — для средней оси).

Итак, по отношению к главным осям инерции произведения инерции обращаются в нули. Если α, β, γ есть направляющие косинусы оси по отношению к главным осям инерции для данной точки, то момент инерции будет выражаться через главные моменты простейшим образом:

$$I_s = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2. \qquad (16.7)$$

Главные оси инерции и главные моменты инерции для центра масс называются соответственно главными *центральными* осями и моментами инерции тела. Главные центральные моменты могут обозначаться соответственно

$$I_{xx} = I_1;\ I_{yy} = I_2;\ I_{zz} = I_3.$$

В дальнейшем в нашем курсе мы будем иметь дело с моментами инерции и центробежными моментами инерции для ортогональных осей с началом координат в *центре инерции тела.*

Вернемся к обозначениям моментов цифровыми индексами и запишем компоненты центрального тензора инерции в следующей таблице:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_{1,1} & I_{1,2} & I_{1,3} \\ I_{2,1} & I_{2,2} & I_{2,3} \\ I_{3,1} & I_{3,2} & I_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Тензор инерции является симметричным тензором второго ранга. Он имеет шесть различных компонентов. По главной диагонали располагаются моменты инерции относительно координатных осей. Поворотом координатных осей до совпадения с главными центральными осями инерции тензор приводится к диагональному виду. Остаются только компоненты по главной диагонали I_1, I_2 и I_3, которые в этом случае являются *главными центральными* моментами инерции, а центробежные моменты инерции обращаются в нули:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Момент инерции тела относительно любой оси вычисляется по формуле (16.7) и теореме Штейнера (16.4).

Тело, у которого все три главных центральных момента инерции различны, называют *асимметричным волчком,* если же два момента инерции одинаковы — *симметричным волчком,* одинаковы три — *шаровым.* Названия происходят от форм эллипсоидов инерции.

Пример 16.1. **Вычисление момента инерции однородного стержня.**

Длину стержня обозначим l. Начало координат совместим с центром масс Выделим элемент длины dx. Обозначим линейную плотность стержня δ. Вычислим момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной стержню:

$$I_c = \int_V R^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \delta dx = \frac{1}{12} ml^2,$$

где m — масса стержня.

Момент инерции этого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец A, найдем по теореме Штейнера, т. е.

$$I_s = I_c + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

Пример 16.2. **Вычисление момента инерции однородного обода.**

Имеем тонкий однородный обод с радиусом R и с массой m. Разбивая его на точечные массы dm, найдем его момент инерции относительно оси симметрии:

$$I_c = \int_V R^2 dm = mR^2.$$

Этот результат легко распространить на тонкостенный цилиндр. Применяя теорему Штейнера, найдем момент инерции относительно образующей цилиндра:

$$I_s = I_c + mR^2 = 2mR^2.$$

Пример 16.3. **Вычисление момента инерции однородного диска.**

Имеем тонкий однородный диск с радиусом R и с массой m. Разобьем его на точечные элементы массой dm, положение которых определяется полярными координатами r и φ. Пусть поверхностная плотность массы — δ. Тогда $dm = \delta r d\varphi dr$. Найдем момент инерции диска относительно оси симметрии: $I_c = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \delta r d\varphi dr = \frac{1}{2} mR^2$.

Представляя однородный прямой круговой цилиндр как набор тонких дисков, получим аналогичный результат. Для оси, совпадающей с одной из образующих цилиндра, по теореме Штейнера имеем: $I_s = I_c + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$.

Пример 16.4. **Вычисление момента инерции однородного шара.**

Вычислим сначала полярный момент инерции однородного шара по формуле

$$H = \int_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dm = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV.$$

Если в качестве элементарного объема dV выбрать сферический слой толщиной dr и радиусом r, то $H = \int_0^R \rho r^2 4\pi r^2 dr = \frac{4}{5} \pi \rho R^5$.

Вводя массу шара $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$, имеем также для полярного момента инерции выражение $H = \frac{3}{5} mR^2$.

Далее заметим, что моменты инерции шара относительно любой оси, проходящей через его центр, одинаковы. Поэтому с помощью формулы $I_1 + I_2 + I_3 = 2H$ получаем значение момента инерции шара относительно оси, проходящей через центр: $I_c = \frac{2H}{3} = \frac{2}{5} mR^2$.