

## § 17. Динамика твердого тела

**17.1. Движение центра масс и поступательное движение.** В § 2 рассматривалась кинематика движения твердого тела. Там было установлено, что в общем случае движение может быть представлено как совокупность поступательного движения тела со скоростью некоторой его точки — полюса и вращения твердого тела вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс. В данном параграфе рассматривается движение твердого тела под действием приложенных к нему сил. Мы будем стремиться представить движение как совокупность поступательного движения и вращательного.

Для твердого тела справедлива теорема о движении центра масс системы (§ 14), выражаясь формулой

$$\vec{m}\ddot{a}_c = \vec{F}. \quad (17.1)$$

Теперь ее можно сформулировать так: центр масс твердого тела движется как точка, в которой сосредоточена масса всего тела, а к ней приложен главный вектор сил, действующих на твердое тело.

Таким образом, в твердом теле выделяется точка — центр масс, координаты которой определяются формулами (13.5):

$$x_c = \frac{1}{m} \int_V \rho x dV, \quad y_c = \frac{1}{m} \int_V \rho y dV, \quad z_c = \frac{1}{m} \int_V \rho z dV,$$

где  $\rho(x, y, z)$  — плотность тела.

Центр масс движется в соответствии с уравнением (17.1). В проекциях на неподвижные оси координат  $Oxyz$  (см. рис. 2.1) имеем уравнения движения центра масс:  $m\dot{x}_c = F_x$ ,  $m\dot{y}_c = F_y$ ,  $m\dot{z}_c = F_z$ . Данные уравнения полностью исчерпывают задачу о движении твердого тела в случае поступательного движения. Последнее будет иметь место, если система сил, приложенных к твердому телу, сводится к равнодействующей силе, проходящей через центр масс, а в начальный момент времени вращение тела отсутствует. Инертные свойства тела при поступательном движении полностью характеризуются массой тела.

Если главный вектор сил  $\vec{F} = 0$ , то имеются интегралы движения:  $\dot{x}_c = C_1$ ,  $\dot{y}_c = C_2$ ,  $\dot{z}_c = C_3$ .

Вторая задача динамики для поступательного движения твердого тела оказывается совпадающей со второй задачей динамики материальной точки. Но в общем случае, кроме движения центра масс, будет иметь место вращение твердого тела. Поскольку движение твердого тела всегда можно разложить на поступательное и вращательное (§ 2), то вращение следует рассматривать в системе, центр которой помещен в центре масс, а оси остаются параллельными самим себе, т. е. система движется поступательно. В общем случае пространственная система сил, приложенных к твердому телу, приводится не к одной равнодействующей, а к равнодействующей силе, равной главному вектору системы  $\vec{F}$ , и к равнодействующей паре, равной главному моменту системы  $\vec{M}$ . Для определения характера

движения твердого тела и для разложения его на поступательное и вращательное следует выбрать в качестве точки приложения равнодействующей силы — центра приведения сил — центр масс тела. После приведения система сводится к равнодействующей силе  $\vec{F}$  и паре с моментом  $\vec{M}$ . Возможны следующие частные случаи:

$\vec{F} \neq 0, \vec{M} = 0$ ; тело движется поступательно, если в начальный момент времени оно не имело вращения вокруг оси, проходящей через центр масс. (Если тело обладало в начальный момент времени угловой скоростью, то она сохраняется.)

$\vec{F} = 0, \vec{M} \neq 0$ ; тело вращается с угловым ускорением вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс, а центр масс покоятся или движется с постоянной скоростью.

$\vec{F} \neq 0, \vec{M} \neq 0$ ; центр масс движется ускоренно и тело вращается с угловым ускорением вокруг центра масс.

Таким образом, при указанном выборе системы остается изучить вращение тела в ней.

**17.2. Выражения для момента импульса твердого тела.** Момент импульса твердого тела получим из выражения (13.8) для произвольной системы материальных точек путем предельного перехода к интегрированию по объему тела:  $L = \int_V [\vec{r} \vec{v}] dm$ . Пусть моментной точкой служит произвольно выбранная точка тела  $O$ . По формуле (3.5) скорость движения любой точки твердого тела равна:  $\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \vec{r}']$ , где  $\vec{v}_0$  — скорость полюса  $O$ ,  $\vec{\omega}$  — вектор угловой скорости тела и  $\vec{r}'$  — радиус-вектор рассматриваемой точки в твердом теле. Подставим эту скорость в выражения для вектора момента импульса твердого тела относительно полюса  $O$  и получим следующее выражение:

$$\vec{L} = \int_V [\vec{r}' dm \vec{v}_0] + \int_V [\vec{r}' [\vec{\omega} \vec{r}']] dm,$$

или (после раскрытия двойного векторного произведения и введения радиус-вектора центра масс тела)

$$\vec{L} = m [\vec{r}'_c \vec{v}_0] + \int_V \vec{r}'^2 dm - \int_V \vec{r}' (\vec{\omega} \vec{r}') dm.$$

Очевидно, что первое слагаемое связано с поступательным движением тела, а остальные — с вращательным.

Последнее сложное выражение для вектора  $\vec{L}$  упрощается при обращении в нуль первого слагаемого в двух случаях: когда полюсом  $O$  служит неподвижная точка тела (тогда  $\vec{v}_0 = 0$ ) и когда полюс  $O$  совпадает с центром масс тела (тогда  $\vec{r}'_c = 0$ ).

Отсюда следует важное указание о выборе начала координат подвижной системы: если у твердого тела имеется неподвижная

точка, то начало координат нужно совместить с ней, в противном случае надо поместить начало координат в центр масс тела. Предположим, что выбор моментной точки сделан именно таким образом. Спроектируем  $\vec{L}$  на оси подвижной системы. Все преобразования достаточно проследить для одной из трех проекций, например для  $L_x$ . Имеем:

$$L_{x'} = \omega_{x'} \int_V (r')^2 dm - \int_V x' (\vec{\omega} \cdot \vec{r'}) dm = \\ = \omega_{x'} \int_V ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) dm - \int_V x' (\omega_x x' + \omega_y y' + \omega_z z') dm$$

После приведения подобных членов получаем результат:

$$L_{x'} = \omega_{x'} \int_V ((y')^2 + (z')^2) dm - \omega_y \int_V x' y' dm - \omega_z \int_V x' z' dm.$$

Аналогичным способом вычисляются и проекции  $L_{y'}$  и  $L_{z'}$ .

После сокращенного обозначения коэффициентов при проекциях угловой скорости, являющихся моментами произведениями инерции тела относительно координатных осей, окончательный результат проецирования выразится следующим образом:

$$\begin{cases} L_{x'} = I_{11}\omega_{x'} + I_{12}\omega_{y'} + I_{13}\omega_{z'}; \\ L_{y'} = I_{12}\omega_{x'} + I_{22}\omega_{y'} + I_{23}\omega_{z'}; \\ L_{z'} = I_{13}\omega_{x'} + I_{23}\omega_{y'} + I_{33}\omega_{z'}. \end{cases} \quad (17.2)$$

Выражения для проекций момента количества движения на подвижные оси, связанные с твердым телом, остаются еще весьма сложными. Дальнейшее их упрощение достигается путем совмещения подвижных осей с главными осями инерции тела. В этом случае произведения инерции тела обратятся в нули и мы получим простейшие выражения для проекций момента количества движения:

$$L_{x'} = I_1\omega_x, \quad L_{y'} = I_2\omega_y, \quad L_{z'} = I_3\omega_z. \quad (17.3)$$

Заметим, что в общем случае вектор момента количества движения  $\vec{L}$  не направлен по мгновенной оси вращения, определяемой вектором  $\vec{\omega}$ . Это следует из формул (17.3). Совпадение имеет место только для случая, когда осью вращения служит главная ось инерции. Из формул (17.3) при  $\omega_{x'} = \omega$ ,  $\omega_{y'} = \omega_{z'} = 0$ , например, следует:  $L_{x'} = I_1\omega$ ,  $L_{y'} = L_{z'} = 0$ , поэтому справедливо векторное равенство  $\vec{L} = I_1\vec{\omega}$ , которое не выполняется в общем случае.

**17.3. Динамические уравнения вращения твердого тела.** Переходим к рассмотрению теоремы об изменении момента импульса твердого тела. Общий вид формулы этой теоремы совпадает с ранее полученной для произвольной системы материальных точек (14.4),

а именно  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ .

Векторное уравнение, выражающее теорему для твердого тела, приходится проецировать на подвижные оси (см. § 2). При проецировании произвольного вектора на подвижную ось проекция про-

изводной вообще не равна производной от проекции вектора на ось, т. е.  $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{x'} \neq \frac{dL_x}{dt}$ .

В справедливости этого утверждения можно убедиться, рассматривая простой пример: если вектор  $\vec{L}$  постоянный, то его проекция на подвижную ось будет изменяться со временем. Производная постоянного вектора по времени равна нулю, и равной нулю должна быть и проекция производной вектора на любую ось. Производная же от переменной проекции вектора на подвижную ось не равна нулю.

Придадим уравнению, выражающему теорему об изменении момента импульса, другую форму, удобную для проецирования на подвижные оси. Если представить вектор  $\vec{L}$  в виде направленного отрезка, то производная  $\frac{d\vec{L}}{dt}$  определяет скорость конца этого отрезка. Обозначим эту скорость  $\vec{V}$ , и уравнение, выражающее теорему, приобретет вид:  $\vec{V} = \vec{M}$ .

*Скорость движения конца вектора момента импульса твердого тела по величине и по направлению совпадает с вектором главного момента сил, приложенных к телу* (теорема Резаля). Вектор скорости  $\vec{V}$  по закону сложения скоростей можно представить в виде суммы относительной скорости и переносной:  $\vec{V} = \vec{V}_{\text{от}} + \vec{V}_{\text{n}}$ . Обозначим относительную скорость через  $\vec{V}_{\text{от}} = \frac{d\vec{L}^*}{dt}$ . Ее проекции на подвижные оси равны производным от проекций вектора  $\vec{L}$  на подвижные оси. Переносную скорость получим, считая вектор  $\vec{L}$  неподвижным относительно тела. Тогда скорость конца вектора совпадает со скоростью точки твердого тела, положение которой определяется радиус-вектором  $\vec{r} = \vec{L}$ , т. е.  $\vec{V}_{\text{n}} = [\vec{\omega} \vec{L}]$ .

Таким образом, имеем общую формулу, справедливую для производной вектора (заданного разложением по осям вращающейся системы):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}^*}{dt} + [\vec{\omega} \vec{L}].$$

Теорема об изменении момента импульса выразится теперь следующим равенством:

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} + [\vec{\omega} \vec{L}] = \vec{M}. \quad (17.4)$$

Проектирование этого векторного уравнения на оси подвижной системы координат дает дифференциальные уравнения для вращательного движения твердого тела. Выбирая в качестве подвижных осей главные оси инерции и полюс, которым служит неподвижная

точка или центр масс, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dL_{x'}}{dt} + \omega_{y'}L_{z'} - \omega_{z'}L_{y'} &= M_{x'}, \\ \frac{dL_{y'}}{dt} + \omega_{z'}L_{x'} - \omega_{x'}L_{z'} &= M_{y'}, \\ \frac{dL_{z'}}{dt} + \omega_{x'}L_{y'} - \omega_{y'}L_{x'} &= M_{z'}.\end{aligned}$$

После подстановки значения проекций  $L_{x'}$ ,  $L_{y'}$ ,  $L_{z'}$  из формул (17.3) последние уравнения принимают окончательный вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \frac{d\omega_{x'}}{dt} + (I_3 - I_2) \omega_{y'} \omega_{z'} = M_{x'}, \\ I_2 \frac{d\omega_{y'}}{dt} + (I_1 - I_3) \omega_{x'} \omega_{z'} = M_{y'}, \\ I_3 \frac{d\omega_{z'}}{dt} + (I_2 - I_1) \omega_{x'} \omega_{y'} = M_{z'}, \end{array} \right. \quad (17.5)$$

где  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  — главные центральные моменты инерции тела.

Данные уравнения называются *динамическими уравнениями Эйлера*. К решению этих уравнений и сводится задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. В общем случае она весьма сложна, и мы обратимся к ней в сравнительно простых частных случаях (см. примеры в конце параграфа).

**17.4. Условия равновесия твердого тела.** В соответствии с тем, что движение твердого тела можно представить как совокупность поступательного движения и вращения, условия его равновесия сводятся к условиям, обеспечивающим равенство нулю ускорения центра масс и углового ускорения. Поэтому, используя формулу (17.1), получаем первое уравнение равновесия:

$$\Sigma \vec{F}_i = 0, \quad (17.6)$$

а из формулы (17.4) — второе уравнение равновесия:

$$\Sigma M_i = 0. \quad (17.7)$$

Таким образом, для равновесия свободного тела необходимо равенство нулю главного вектора и главного момента сил, приложенных к нему.

Условия равновесия для несвободного тела соответственно упрощаются. Так, для тела с неподвижной осью вращения — это равенство нулю суммы моментов сил относительно оси, а с закрепленной точкой — относительно данной точки.

**Пример 17.1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.**

В этом простейшем случае вращательного движения твердого тела применение уравнения (17.4) упрощается. Во-первых, положение подвижной оси, совпадающей с направлением  $\vec{L}$  (например,  $O'z'$ ), с течением времени не изменяется, поэтому имеем только

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M},$$

где при дифференцировании  $\vec{L}$  берется производная от соответствующей проекции. Во-вторых, в данном случае  $\vec{L} = \vec{I}\omega$ , если  $I$  — момент инерции тела относительно указанной оси вращения.

Таким образом, имеем уравнение движения для тела:  $I \frac{d\omega}{dt} = \vec{M}$ , по форме аналогичное основному уравнению динамики материальной точки. В этом случае движение исчерпывается одним скалярным уравнением (в проекциях на ось вращения):

$$I \epsilon = M,$$

из которого, в частности, вытекает, что постоянный момент вызывает равноускоренное вращение.

### Пример 17.2. Физический маятник.

Физическим маятником называют твердое тело, имеющее возможность вращаться без трения вокруг горизонтальной оси и находящееся под действием только силы тяжести (рис. 17.1).

Положению устойчивого равновесия маятника соответствует нахождение центра масс (центра тяжести)  $C$  на вертикали  $AO$ , проходящей через ось подвеса  $O$ . При отклонении маятника от положения равновесия на угол  $\varphi$  сила тяжести развивает момент, стремящийся восстановить нарушенное равновесие. Восстанавливающий момент  $\vec{M}$  и вектор бесконечно малого поворота  $d\varphi$  направлены в противоположные стороны. Уравнение движения в проекциях на ось вращения примет вид:

$$I \frac{d\omega}{dt} = -mga \sin \varphi.$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний, при которых отклонение маятника от положения равновесия настолько мало, что приближенно можно считать  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Дифференциальное уравнение для малых колебаний маятника представляется тогда простейшим линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga\varphi.$$

Общий интеграл этого дифференциального уравнения известен:

$$\varphi = A \sin \left( \sqrt{\frac{mga}{I}} t + \alpha \right).$$

Здесь  $A$  и  $\alpha$  — постоянные интегрирования. Малые колебания маятника происходят

по закону простого гармонического колебания с периодом  $T_\Phi = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}$ .

Величину  $I = \frac{l}{ma}$  называют приведенной длиной физического маятника. Она

показывает, что если массу тела сосредоточить в точке  $O_1$ , то мы получим математический маятник длиной  $l$ , период колебаний которого будет равен периоду колебаний нашего физического маятника:

$$T_M = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = T_\Phi.$$

Точку  $O_1$  называют центром качания.

Существует зависимость между центром качания  $O_1$  и точкой подвеса  $O$ : если центр качания принять за точку подвеса, то прежняя точка подвеса будет центром качания.

Для доказательства этого утверждения прежде всего покажем, что приведенная длина физического маятника  $OO_1 = l \geq a$  (равенство выполняется для математического маятника).

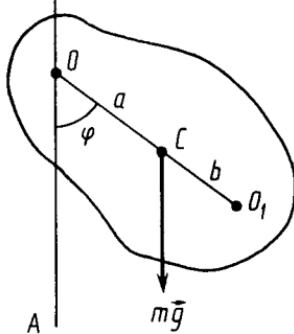


Рис. 17.1.

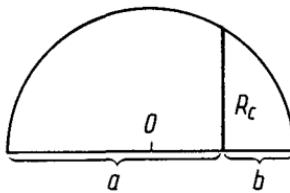


Рис. 17.2.

Момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку  $O$ , находим по теореме Штейнера (16.4):

$$I_0 = I_c + ma^2,$$

а приведенная длина

$$l = \frac{I_0}{ma} = \frac{I_c}{ma} + a > a,$$

так как

$$\frac{I_c}{ma} > 0.$$

Теперь докажем взаимность (сопряженность) точек  $O$  и  $O_1$ . Из предыдущего равенства имеем:

$$\begin{aligned} l - a &= \frac{I_c}{ma}, \\ (l - a)a &= \frac{I_c}{m} = R_c^2. \end{aligned}$$

Здесь  $R_c$  — радиус инерции тела (см. 16.2), который является характеристикой инертных свойств тела при вращении его вокруг определенной оси, не зависящей от переноса точки подвеса. Обозначим  $CO_1 = b$ . Тогда  $ab = R_c^2$ . Из этого равенства вытекает геометрический способ (рис. 17.2) нахождения приведенной длины физического маятника  $l = a + b$  и ее инвариантность относительно точки подвеса и центра качания.

### Пример 17.3. Движение свободного симметричного волчка.

Для определения кинематических уравнений вращения твердого тела вокруг неподвижной точки требуется решение системы нелинейных дифференциальных уравнений Эйлера (17.5). Эта сложная математическая задача может быть аналитически доведена до конца лишь в немногих частных случаях, которыми занимались знаменитые математики Эйлер, Лагранж, Ковалевская и др. Мы в качестве примера рассмотрим наиболее простой случай вращения тела по инерции, т. е. при отсутствии моментов сил, приложенных к телу. Эта задача впервые была решена Эйлером и носит его имя.

Предположим, что центральный эллипсоид инерции рассматриваемого тела есть эллипсоид вращения. Тогда два главных момента инерции между собой равны. Пусть  $I_1 = I_2 \neq I_3$ . Третья неравная ось эллипсоида инерции определяет ось кинетической симметрии тела. В простейшем, но практически важном случае геометрическая ось однородного тела является осью кинетической симметрии. Для того чтобы освободить тело от действия момента силы тяжести, достаточно подпереть его в центре тяжести. Если при этом никаких сил больше нет, то мы получим свободный волчок.

Дифференциальные уравнения Эйлера (17.5) для него имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_x + (I_3 - I_1) \omega_y \omega_z &= 0, \\ I_1 \dot{\omega}_y + (I_1 - I_3) \omega_z \omega_x &= 0, \\ I_3 \dot{\omega}_z &= 0 \end{aligned}$$

При написании уравнений подвижная ось  $Oz'$  предполагается направленной по оси кинетической симметрии. Из последнего уравнения следует первый интеграл движения  $\omega_z = n = \text{const}$

Для дальнейшего интегрирования уравнений используем закон сохранения момента импульса, имеющий место в нашем случае. При движении тела вектор  $\vec{L}$  сохраняет неизменными свой модуль и направление. Совместим с неизменным направлением вектора  $\vec{L}$ , определяемым начальными условиями движения, неподвижную ось  $Oz$ . Спроецируем теперь постоянный вектор  $\vec{L}$ , направленный по оси  $Oz$ , на оси подвижной системы. Заметим, что подобное проецирование выполнялось в § 2 при выводе выражений проекций вектора угловой скорости через эйлеровы углы. Вектор  $\vec{L}$  в нашем случае проецируется совершенно одинаково с составляющей  $\dot{\omega}_z$ , направленной по неподвижной оси  $Oz$ . Поэтому напишем выражения искомых проекций вектора  $\vec{L}$  без пояснений. Имеем

$$L_x = L \sin \theta \sin \psi, \quad L_y = L \sin \theta \cos \psi, \quad L_z = L \cos \theta$$

С другой стороны, проекции вектора момента импульса на главные оси инерции даются общими формулами (17.3)

$$L_x = I_1 \omega_x, \quad L_y = I_2 \omega_y, \quad L_z = I_3 \omega_z$$

Из сравнения выражения для  $L_z$  следует равенство  $L \cos \theta = I_3 \omega_z$ , из которого при использовании первого интеграла для  $\omega_z$  получаем важный результат  $\cos \theta = \frac{I_3 n}{L} = \text{const}$ , откуда  $\theta = \theta_0 = \text{const}$ , т. е. при движении тела ось кинетической симметрии сохраняет постоянным наклон к неподвижной оси  $Oz$ , равный  $\theta_0$ .

Из сравнения выражений для  $L_x$  следует равенство

$$L \sin \theta_0 \sin \psi = I_1 \omega_x$$

Внесем в него значение  $\omega_x$ , выраженное через эйлеровы углы по формуле (2.13), причем принимаем во внимание, что  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ . Имеем  $\dot{\omega}_x = \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \psi$ . Подстановка в выражение  $L_x$  значения проекции угловой скорости приводит к следующему результату

$$L \sin \theta_0 \sin \psi = I_1 \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \psi, \quad \dot{\psi} = \frac{L}{I_1} = \text{const} = \omega_1,$$

т. е. угловая скорость процессионного движения тела постоянна.

Наконец, подставляя в первый интеграл значение  $\omega_z$  из формул (2.13), имеем  $\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta_0 = n$ ,  $\dot{\phi} = n - \omega_1 \cos \theta_0$ .

Отсюда следует, что угловая скорость собственного вращения (вращения вокруг оси кинетической симметрии) тоже постоянна  $\dot{\phi} = \omega_2 = \text{const}$ .

Задача решена, кинематические уравнения движения свободного волчка найдены

$$\psi = \omega_1 t + \psi_0, \quad \phi = \omega_2 t + \phi_0, \quad \theta = \theta_0 \quad (17.8)$$

Эти уравнения описывают простейшее движение твердого тела вокруг неподвижной точки, называемое *регулярной прецессией*. Наглядно движение можно представить, если круглый конус катить без скольжения по боковой поверхности не подвижного конуса так, чтобы вершины конусов совпадали (См. пример 2.3 и рис. 2.9).

Пример 17.4 **Движение симметричного волчка под действием сил.**

Поставим вопрос: возможна ли регулярная прецессия симметричного волчка при наличии моментов сил и каковы они должны быть?

Систему дифференциальных уравнений Эйлера

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_x + (I_3 - I_1) \omega_y \omega_z = M_x, \\ I_1 \dot{\omega}_y + (I_1 - I_3) \omega_z \omega_x = M_y, \\ I_3 \dot{\omega}_z = M_z, \end{cases}$$

решим относительно  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  при заданных кинематических уравнениях (17.8)

$$\dot{\psi} = \omega_1, \dot{\varphi} = \omega_2, \dot{\theta} = 0, \theta = \theta_0$$

Подставляя в проекции угловых скоростей (формулы (2.13)) найденные значения  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\theta}$ , получаем

$$\omega_x = \omega_2 \sin \theta_0 \sin \psi,$$

$$\omega_y = \omega_2 \sin \theta_0 \cos \psi,$$

$$\omega_z = \omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1$$

Затем вычисляем моменты

$$M_x = M \cos \psi, M_y = -M \sin \psi, M_z = 0,$$

где

$$M = I_3 \omega_1 \omega_2 \sin \theta_0 \left[ 1 + \frac{I_3 - I_1}{I_3} \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right] \quad (17.9)$$

Это значит, что регулярная прецессия будет происходить если на симметричный волчок действует момент сил с указанными проекциями

### Пример 17.5 Гироскоп и гироскопический момент.

Гироскопом называется симметричный волчок, обладающий очень большой скоростью вращения  $\omega_1$  вокруг оси кинетической симметрии. В свою очередь ось кинетической симметрии также может вращаться (прецессировать) с относительно малой угловой скоростью  $\omega_2$ , так что осуществляется сильное неравенство  $\omega_2 \ll \omega_1$ . Тогда формула (17.9) дает приблизительное равенство  $M = I_3 \omega_2 \omega_1 \sin \theta_0$  и можно ввести вектор

$$\vec{M} = I_3 [\vec{\omega}_2 \vec{\omega}_1] \quad (17.10)$$

Это главный момент сил, приложенных к симметричному волчку в результате чего осуществляется регулярная прецессия. Как видим, вектор момента должен лежать на линии узлов  $OV$  (см. рис. 2.2)

Формула (17.10) и кладется в основу элементарной теории гироскопических явлений. Момент силы  $\vec{M}$  передается оси гироскопа через опоры (подшипники) в которых она закреплена, и вызывает прецессию гироскопа с угловой скоростью  $\vec{\omega}_2$ . В свою очередь, гироскоп при изменении направления своей оси вращения в прецессионном движении оказывает на опоры давление с моментом силы  $\vec{M}_g = -\vec{M}$ .

Момент  $\vec{M}_g$  называется гироскопическим. Он будет определяться равенством

$$\vec{M}_g = I_3 [\vec{\omega}_1 \vec{\omega}_2] \quad (17.11)$$

Рассмотрим пример применения уравнений (17.9), (17.10) и (17.11). На рисунке 17.3 изображен диск, вращающийся в опорах  $AB$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}_2$ . Пусть к опорам приложена пара сил  $\vec{F}$  и  $-\vec{F}$ , момент которой представлен вектором  $\vec{M}$ , направленным за плоскость чертежа. По формуле (17.10) вращение оси, вызываемое парой сил, определяется вектором  $\vec{\omega}_1$ , расположенным в плоскости чертежа. Таким образом ось

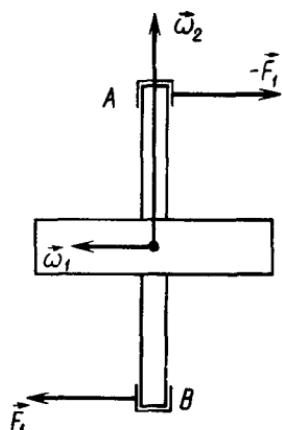


Рис. 17.3

диска в точке приложения сил  $\vec{F}$  движется в направлении, перпендикулярном силе. На первый взгляд такое поведение оси представляется странным, так как в обычных условиях покоящееся тело под действием приложенной силы всегда смещается в направлении последней. В данном случае сила приложена к вращающемуся телу и поведение оси под действием силы обусловлено инерционными свойствами быстрого вращения вокруг оси.

Условия, аналогичные рассмотренному примеру, часто встречаются в действительности. Вал и воздушный винт или турбина двигателя самолета представляют систему, аналогичную вращающемуся диску. При виражах самолета в горизонтальной плоскости ось двигателя получает вынужденную прецессию с угловой скоростью  $\omega_2$ , направленной по вертикали. Тогда в соответствии с формулой (17.11) заключаем, что к самолету приложен гирокопический момент, стремящийся повернуть его вокруг горизонтальной оси. В результате при вираже нос самолета будет поворачиваться вниз или вверх и пилот для компенсации гирокопического момента должен при виражах устранять этот поворот действием вертикального руля.

Возникновение гирокопического момента при вынужденном повороте оси гирокопа используется в гирокопическом компасе и многих других современных гирокопических приборах и устройствах.

## § 18. Кинетическая энергия твердого тела

**18.1. Формула кинетической энергии твердого тела.** Найдем формулу кинетической энергии твердого тела. Будем исходить из теоремы Кенига для системы материальных точек, выражющейся формулой (13.11):

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v'_i)^2. \quad (18.1)$$

Первый член представляет здесь кинетическую энергию поступательного движения системы со скоростью центра масс. Если применить формулу к твердому телу, он не изменяется. Второй член в (13.11) представляет сумму кинетических энергий всех точек при их движениях относительно центра масс (центра инерции) со скоростями  $v'_i$ . Для твердого тела это будут скорости его элементов  $dm$ , движение которых ограничено условием постоянства формы и размеров тела. Движение элементов твердого тела относительно системы, движущейся поступательно вместе с центром масс, имеет место только вследствие вращения тела вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс.

Скорость движения точки твердого тела относительно центра масс

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}],$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный к элементу массы  $dm$  из центра масс  $C$ . Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела вокруг оси  $s$  ( $s_0$  — единичный вектор оси), проходящей через центр масс тела, выразится следующим интегралом, распространенным по объему тела:

$$T_v = \frac{1}{2} \int_V [\vec{\omega} \vec{r}]^2 dm.$$