диска в точке приложения сил $\vec{F}$ движется в направлении, перпендикулярном силе. На первый взгляд такое поведение оси представляется странным, так как в обычных условиях покоящееся тело под действием приложенной силы всегда смещается в направлении последней. В данном случае сила приложена к вращающемуся телу и поведение оси под действием силы обусловлено инертными свойствами быстрого вращения вокруг оси.

Условия, аналогичные рассмотренному примеру, часто встречаются в действительности. Вал и воздушный винт или турбина двигателя самолета представляют систему, аналогичную вращающемуся диску. При виражах самолета в горизонтальной плоскости ось двигателя получает вынужденную прецессию с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, направленной по вертикали Тогда в соответствии с формулой (17.11) заключаем, что к самолету приложен гироскопический момент, стремящийся повернуть его вокруг горизонтальной оси В результате при вираже нос самолета будет поворачиваться вниз или вверх и пилот для компенсации гироскопического момента должен при виражах устранять этот поворот действием вертикального руля.

Возникновение гироскопического момента при вынужденном повороте оси гироскопа используется в гироскопическом компасе и многих других современных гироскопических приборах и устройствах.

§ 18. Кинетическая энергия твердого тела

18.1. Формула кинетической энергии твердого тела. Найдем формулу кинетической энергии твердого тела. Будем исходить из теоремы Кенига для системы материальных точек, выражающейся формулой (13.11):

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (v_i')^2. \qquad (18.1)$$

Первый член представляет здесь кинетическую энергию поступательного движения системы со скоростью центра масс. Если применить формулу к твердому телу, он не изменяется. Второй член в (13.11) представляет сумму кинетических энергий всех точек при их движениях относительно центра масс (центра инерции) со скоростями v_i'. Для твердого тела это будут скорости его элементов dm, движение которых ограничено условием постоянства формы и размеров тела. Движение элементов твердого тела относительно системы, движущейся поступательно вместе с центром масс, имеет место только вследствие вращения тела вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс.

Скорость движения точки твердого тела относительно центра масс

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\, \vec{r}],$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный к элементу массы dm из центра масс C. Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела вокруг оси s ($\vec{s}_0$ — единичный вектор оси), проходящей через центр масс тела, выразится следующим интегралом, распространенным по объему тела:

$$T_в = \frac{1}{2} \int_V [\vec{\omega}\, \vec{r}]^2 dm.$$

Заметив, что $r\sin(\vec{\omega}\wedge\vec{r}) = \rho$ (рис. 18.1), получим:

$$T_в = \frac{1}{2}\omega^2\int_V \rho^2 dm.$$

Но величина интеграла по формуле (16.1) является моментом инерции тела относительно оси.

Итак, кинетическая энергия вращения твердого тела определяется формулой

$$T_в = \frac{1}{2} I_s\omega^2,$$

а полная кинетическая энергия твердого тела выражается теперь следующим равенством:

$$T = \frac{1}{2} mv_c^2 + \frac{1}{2} I_s\omega^2, \qquad (18.2)$$

где первый член описывает кинетическую энергию тела при *поступательном* движении, второй — при *вращательном*. Оба члена являются независимыми в том отношении, что не связаны друг с другом через скорости, поэтому могут применяться по отдельности.

Но полученная формула для кинетической энергии вращательного движения твердого тела (18.2) может быть использована для вычисления только в случае, когда вектор угловой скорости не изменяет своего направления при движении тела (например, при вращении тела вокруг неподвижной оси). Если это условие не выполняется, момент инерции I_s становится переменной величиной и формула практически оказывается непригодной для использования. В этом случае выражаем момент инерции I_s относительно мгновенной оси вращения через главные моменты инерции по формуле (16.7) и замечаем, что $\omega\alpha = \omega_{x'}$, $\omega\beta = \omega_{y'}$, $\omega\gamma = \omega_{z'}$ есть проекции угловой скорости на подвижные оси. Тогда для кинетической энергии вращательного движения получается следующее выражение:

$$T_в = \frac{1}{2}(I_1\omega^2_{x'} + I_2\omega^2_{y'} + I_3\omega^2_{z'}). \qquad (18.3)$$

Подставив сюда значения из формул (17.3), запишем выражение кинетической энергии вращения твердого тела через проекции момента импульса на главные оси инерции:

$$T_в = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2_x}{I_1} + \frac{L^2_y}{I_2} + \frac{L^2_z}{I_3}\right). \qquad (18.4)$$

Как для тела с неподвижной осью вращения, так и для шарового волчка формула (18.4) упрощается:

$$T_в = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I}. \qquad (18.5)$$

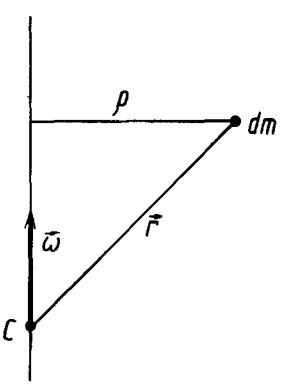

Рис. 18.1.

18.2. Теорема об изменении кинетической энергии твердого тела. Для того чтобы найти изменение кинетической энергии твердого тела, будем исходить из теоремы для системы материальных точек (14.8), которая гласит, что дифференциал кинетической энергии системы равен элементарной работе внешних и внутренних сил и записывается равенством

$$dT = \delta A + \delta A',$$

но для твердого тела $\delta A' = 0$ вследствие связей твердости. Кинетическая энергия твердого тела найдена ранее — формула (18.2). Ее приращение и равно работе внешних сил.

Рассмотрим теперь элементарную работу сил, приложенных к твердому телу, при его бесконечно малом перемещении. Пусть к твердому телу приложена произвольная система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, точки приложения которых в неподвижной системе координат $Oxyz$ определяются векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ (см. § 3). Начало координат подвижной системы O' совместим с центром масс C твердого тела, а оси x', y', z', связанные с телом, направим произвольно. Бесконечно малое перемещение точки приложения i-й силы равно:

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_c + [d\vec{\varphi}\,\vec{r}_i'].$$

Элементарная работа i-й силы поэтому выражается равенством

$$\vec{F}_i d\vec{r}_i = \vec{F}_i d\vec{r}_c + \vec{F}_i[d\vec{\varphi}\,\vec{r}_i'],$$

а элементарная работа всех сил, приложенных к телу, равна:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i d\vec{r}_i = d\vec{r}_c \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + d\vec{\varphi} \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i'\vec{F}_i].$$

(В скалярно-векторном произведении множители переместительны с соблюдением кругового порядка. Заметим также, что векторы $d\vec{r}_c$ и $d\vec{\varphi}$ не зависят от точки тела и могут быть вынесены за знак суммы.) Вводя сокращенное обозначение для главного вектора и главного момента сил, приходим к окончательному выражению элементарной работы сил, приложенных к твердому телу:

$$\delta \vec{A} = \vec{F} d\vec{r}_c + \vec{M} d\vec{\varphi}.$$

Полученный результат коротко выражается словами: *на поступательном перемещении твердого тела «работает» главный вектор системы сил, а на вращательном — главный момент.*

Теорема об изменении кинетической энергии твердого тела запишется теперь следующим равенством:

$$d\left(\frac{1}{2} m v_c^2\right) + d\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right) = \vec{F} d\vec{r}_c + \vec{M} d\vec{\varphi}.$$

Это равенство распадается на два самостоятельных уравнения, описывающих изменение кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью центра масс и изменение кинетической

энергии вращательного движения тела вокруг центра масс, т. е.

$$d\left(\frac{1}{2} m v_c^2\right) = \vec{F} d\vec{r}_c, \tag{18.6}$$

$$d\left(\frac{1}{2} I_c \omega^2\right) = \vec{M} d\vec{\varphi}, \tag{18.7}$$

что еще раз свидетельствует о возможности раздельного изучения поступательного и вращательного движения тела.

ГЛАВА VI. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В теме, к изучению которой вы приступаете, будут рассматриваться общие методы решения задач механики для *несвободной системы материальных точек*. Данный раздел известен как *аналитическая механика*. Суть применения методов и уравнений аналитической механики состоит в упрощении задач на систему материальных точек. В § 13 говорилось о том, что для описания движения системы из n материальных точек требуется составить и решить $3n$ дифференциальных уравнений второго порядка. Если система несвободна, то, как это следует из § 7, необходимо учесть уравнения связи, найти силы реакции, что еще более осложняет задачу с математической стороны. В аналитической механике разработаны методы, посредством которых снижается число дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы со связями.

§ 19. Принцип виртуальных перемещений

19.1. Виртуальные перемещения, вариации координат и функций. Ниже везде изучается система материальных точек, на которую наложено m *голономных, удерживающих*, в общем случае *нестационарных* связей, выражаемых уравнениями

$$\begin{cases} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, z_n, t) = 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, z_n, t) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, z_n, t) = 0. \end{cases} \tag{19.1}$$

Так как число точек системы предполагается равным n, то число степеней свободы системы будет $3n - m = s$.

Назовем произвольные бесконечно малые перемещения точек системы, удовлетворяющие наложенным на нее связям при фиксированном моменте времени, *виртуальными перемещениями*. Вектор виртуального перемещения i-й точки обозначим символом $\delta\vec{r}_i$, а проекции на оси координат δx_i, δy_i, δz_i и назовем последние *вариациями координат*. Важно подчеркнуть, что виртуальные перемещения вовсе не предполагают наличие движения системы под действием приложенных сил; это мысленные перемещения точек системы из данного положения в любое ближайшее положение, которое возможно для системы по условиям связей, взятых в рассматриваемый момент времени.