энергии вращательного движения тела вокруг центра масс, т. е.

$$d\left(\frac{1}{2} m v_c^2\right) = \vec{F} d\vec{r}_c, \tag{18.6}$$

$$d\left(\frac{1}{2} I_c \omega^2\right) = \vec{M} d\vec{\varphi}, \tag{18.7}$$

что еще раз свидетельствует о возможности раздельного изучения поступательного и вращательного движения тела.

ГЛАВА VI. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В теме, к изучению которой вы приступаете, будут рассматриваться общие методы решения задач механики для *несвободной системы материальных точек*. Данный раздел известен как *аналитическая механика*. Суть применения методов и уравнений аналитической механики состоит в упрощении задач на систему материальных точек. В § 13 говорилось о том, что для описания движения системы из n материальных точек требуется составить и решить $3n$ дифференциальных уравнений второго порядка. Если система несвободна, то, как это следует из § 7, необходимо учесть уравнения связи, найти силы реакции, что еще более осложняет задачу с математической стороны. В аналитической механике разработаны методы, посредством которых снижается число дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы со связями.

§ 19. Принцип виртуальных перемещений

19.1. Виртуальные перемещения, вариации координат и функций. Ниже везде изучается система материальных точек, на которую наложено m *голономных, удерживающих*, в общем случае *нестационарных* связей, выражаемых уравнениями

$$\begin{cases} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, z_n, t) = 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, z_n, t) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, z_n, t) = 0. \end{cases} \tag{19.1}$$

Так как число точек системы предполагается равным n, то число степеней свободы системы будет $3n - m = s$.

Назовем произвольные бесконечно малые перемещения точек системы, удовлетворяющие наложенным на нее связям при фиксированном моменте времени, *виртуальными перемещениями*. Вектор виртуального перемещения i-й точки обозначим символом $\delta\vec{r}_i$, а проекции на оси координат δx_i, δy_i, δz_i и назовем последние *вариациями координат*. Важно подчеркнуть, что виртуальные перемещения вовсе не предполагают наличие движения системы под действием приложенных сил; это мысленные перемещения точек системы из данного положения в любое ближайшее положение, которое возможно для системы по условиям связей, взятых в рассматриваемый момент времени.

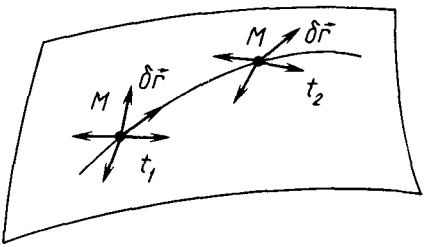

Рис 19.1.

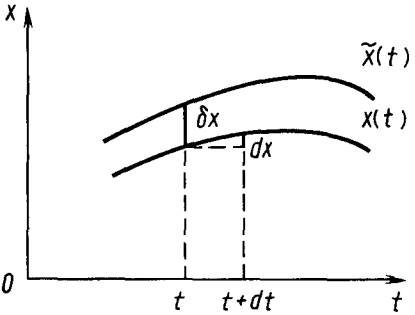

Рис. 19 2

Понятие виртуального перемещения поясним на примере движения одной материальной точки по поверхности, которая с течением времени может деформироваться. Фиксируя положение материальной точки на траектории действительного движения в любые моменты времени t_1, t_2, имеем соответственно виртуальные перемещения для каждого момента времени (рис. 19.1). Подчеркнем еще раз, что виртуальное перемещение не происходит во времени, не является функцией времени как действительное перемещение материальной точки при ее движении.

Пусть происходит действительное движение материальной точки в системе. Координата x_i есть некоторая функция времени, т. е. $x_i = x_i(t)$. Эта функция может быть весьма различной при различных силах и начальных условиях; движение может быть каким угодно в широких пределах. Но при определенных силах и начальных условиях это совершенно определенная конкретная функция. Для каждого действительного положения точки связи допускают близкие соседние положения, отличающиеся от действительного вариациями координат. Поэтому мысленно может быть рассмотрено «соседнее» движение, происходящее по уравнению $\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(t)$, т. е. такое, что для любого момента времени t разность значения координаты x_i соседних движений будет бесконечно малой величиной. Очевидно, что разность координат точки в действительном и мысленном движении в данный момент времени и будет вариацией координаты: $\tilde{x}_i(t) - x_i(t) = \delta x_i$.

Вариация координаты δx_i есть ее бесконечно малое приращение, обусловленное переходом в данный момент времени от заданного движения к мысленному, допускаемому связями.

Укажем на различие вариации и бесконечно малого приращения координаты dx_i, обусловленного приращением аргумента t. Последнее рассматривается как *дифференциал координаты* $x_i(t + dt) - x_i(t) = dx_i$.

На рисунке 19.2 изложенные выше определения вариации и дифференциала координаты x_i пояснены графически. Это различные, но оба бесконечно малые изменения координат.

В аналитической механике широко применяется метод варьирования не только координат, но и функций координат точек системы. Варьирование является математическим методом исследования систем материальных точек со связями с целью получения уравнений, описывающих их равновесие и движение.

Варьирование — это нечто подобное тому, что делает портной перед раскроем материала. Прежде чем разрезать данный кусок материала, он должен мысленно представить по крайней мере несколько возможных вариантов и только потом осуществить один из них. Аналогичное положение имеет место и при проектировании любого сооружения Процесс проектирования — это выбор одного из многих возможных при данных условиях решений поставленной задачи, как правило, определяемого некоторыми дополнительными жесткими требованиями. размерами, назначением, экономичностью и т. д. Во всех подобных случаях приходится производить процесс сравнения между многими объектами, объединенными в семейство по какому-либо признаку.

Можно поставить задачу о движении системы со связями следующим образом: найти единственное движение, которое осуществляется при заданных силах и начальных условиях из всех, допускаемых связями, т. е. возможных по условиям связей. Математически задача сводится к выбору из различных функций, образующих непрерывное множество, какой-то единственной. Такая физическая задача ставится и решается в аналитической механике. Она связана с понятием виртуального перемещения, вариациями функций, ибо выбор нужной функции определяют ее вариации.

Пусть задана некоторая функция координат и времени

$$f = f(x_1 y_1 z_1,\ x_2 y_2 z_2,\ \ldots,\ x_n\ y_n\ z_n,\ t).$$

Координаты — аргументы функции — подверглись варьированию, при этом изменилось и значение функции. *Приращение функции, обусловленное вариацией ее независимых переменных (кроме времени), называется вариацией функции.* Найдем вариацию функции. Запишем новое значение функции:

$$f = f(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1,\ z_1 + \delta z_1,\ \ldots,\ x_n + \delta x_n,\ y_n + \delta y_n,\ z_n + \delta z_n,\ t).$$

Разложим функцию по степеням малых величин δx_i, δy_i, δz_i, используя ряд Тейлора:

$$f(x_1 + \delta x_1,\ \ldots,\ z_n + \delta z_n,\ t) = f(x_1,\ \ldots,\ z_n,\ t) +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} \delta z_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_n} \delta z_n \right) + \ldots$$

Пренебрегая членами второго и высшего порядков малости и используя определение вариации функции

$$\delta f = f(x_1 + \delta x_1,\ \ldots,\ z_n + \delta z_n,\ t) - f(x_1,\ \ldots,\ z_n,\ t),$$

получаем вариацию функции:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} \delta z_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_n} \delta z_n. \qquad (19.2)$$

Обращает на себя внимание, что вариация функции (19.2) отличается от полного дифференциала функции только отсутствием члена $\frac{\partial f}{\partial t} \delta t$. При варьировании функций, зависящих от времени явно, *первая вариация функции вычисляется как полный дифферен-*

циал, но при условии, что вариация независимого переменного t равна нулю: $\delta t = 0$. При варьировании сравнение функций производится для одного и того же значения аргумента t. Это так называемая *изохронная* вариация функции.

19.2. Ограничения, налагаемые связями на виртуальные перемещения. Вариации декартовых координат точек системы не могут быть совершенно произвольными и независимыми величинами потому, что декартовы координаты точек системы до и после перемещения должны удовлетворять уравнениям связи (19.1). Найдем, какие ограничения налагаются связями на вариации декартовых координат точек. Приращенные значения координат $x_i + \delta x_i$, $y_i + \delta y_i$, $z_i + \delta z_i$ по определению виртуального перемещения должны удовлетворять связям (19.1), т. е. справедливы равенства

$$f_1 = (x_1 + \delta x_1, \ldots, z_n + \delta z_n, t) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_m = (x_1 + \delta x_1, \ldots, z_n + \delta z_n, t) = 0.$$

Найдем вариации функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$; варьируя уравнения связей, (19.1) и используя последние равенства, получим систему линейных уравнений, в которой неизвестными являются вариации декартовых координат:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial z_n}\delta z_n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_m}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial z_n}\delta z_n = 0.$$

Таким образом, среди $3n$ вариаций координат независимых оказывается s-вариаций, т. е. столько, *сколько у системы степеней свободы.*

19.3. Обобщенные координаты. Как уже упоминалось в § 1, аналитическое определение положения материальной точки, а следовательно, и системы может быть осуществлено не только заданием декартовых прямоугольных координат, но и при помощи надлежащего количества параметров, через которые декартовы координаты выражаются однозначно. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

У несвободной системы точек декартовы координаты удовлетворяют системе m независимых уравнений (19.1). При помощи этих уравнений из $3n$ декартовых координат m могут быть выражены как однозначные функции остальных $s = 3n - m$ декартовых координат. Будем условно именовать последние *свободными* координатами. Число свободных координат, таким образом, определяется числом степеней свободы материальной системы. Теперь выберем s независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_s$ так, чтобы свободные декартовы координаты были однозначными функциями этих параметров:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) = 0, \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) = 0, \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) = 0. \end{aligned} \tag{19.3}$$

Так как несвободные координаты являются однозначными функциями свободных координат, то несвободные координаты являются однозначными функциями тех же параметров q_k. Таким образом, все декартовы координаты могут быть выражены по формулам преобразования через s параметров q_k и времени t. При этом уравнения связи (19.1) удовлетворяются тождественно. Определенные таким образом параметры q_k называют *обобщенными координатами* несвободной механической системы. В качестве обобщенных координат могут выступать различные величины. Заметим, что время будет входить в формулы преобразования (19.3) только тогда, когда связи, выражаемые уравнениями (19.1), нестационарны. Если связи стационарны, то декартовы координаты будут функциями только обобщенных координат. Выбор обобщенных координат для данной конкретной задачи не является определенным, он может быть осуществлен различными способами.

В конкретных случаях выбор обобщенных координат подсказывается видом связей, ограничивающих свободу движения механической системы. В дальнейшем предполагается, что обобщенные координаты выбраны и уравнения преобразования (19.3) являются известными.

Метод обобщенных координат, применяемых для описания движения (состояния) системы со связями, допускает важную математическую интерпретацию. Пространство, образованное совокупностью обобщенных координат q_k, носит название *пространства конфигураций*. Оно имеет s измерений. Поскольку состояние системы n материальных точек в любой момент времени задается набором координат $(q_1, q_2, \ldots, q_s)$, то оно тем самым задается положением *точки, изображающей систему* в пространстве конфигураций. Несмотря на формальный характер этого математического приема, он оказывается весьма полезным в ряде вопросов физической теории. Например, описание движения системы с помощью изображающей точки оказывается эффективным и наглядным, если число измерений конфигурационного пространства мало.

Пример 19.1. **Расчет ускорения системы связанных тел.**

Вернемся к системе связанных тел, рассмотренной ранее в примере 13.1. Вместо девяти декартовых координат, определяющих положение всех трех тел системы, она полностью описывается одной координатой q, являющейся смещением третьего тела от первоначального его положения; два других тела испытывают такие же смещения благодаря связям. Как было показано в решении, оно сводится к одному уравнению:

$$\ddot{q} = \frac{g[m_3 - k(m_1 + m_2)]}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Задача аналитической механики и состоит в указании общих простых и кратких путей составления дифференциальных уравнений движения систем в обобщенных координатах, минуя составление и решение громоздких систем из $3n$ дифференциальных уравнений.

Пример 19.2. **Выбор обобщенной координаты.**

На рисунке 19.3 показана система трех зубчатых колес, находящихся в зацеплении друг с другом. Если бы каждое колесо могло вращаться самостоятельно, то в качестве координат следовало бы рассматривать три независимых угла поворота каждого колеса φ_1, φ_2 и φ_3. При наличии связей — зацепления — можно написать

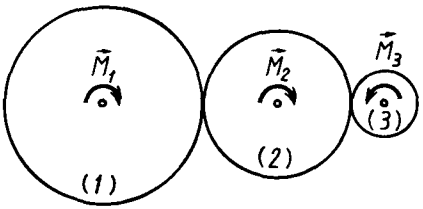

Рис 19 3.

два уравнения связей

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = \frac{r_2}{r_3}.$$

Система имеет одну степень свободы в качестве обобщенной координаты можно выбрать угол поворота первого колеса $q = \varphi_1$ Методы аналитической механики позволяют составить одно динамическое уравнение движения системы, в которое, кроме $\ddot{\varphi}$, войдут моменты инерции колес и моменты приложенных к ним сил (см. пример 20 5).

Пример 19 3 **Выбор двух обобщенных координат.**

В качестве третьего примера рассмотрим материальную точку, движущуюся только по поверхности сферы радиуса l Запишем уравнение связи (в декартовых координатах)

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

Так как система обладает двумя степенями свободы, то в качестве обобщенных координат можно выбрать угловые координаты сферической системы с центром в центре сферы, т е $q_1 = \vartheta$, $q_2 = \varphi$, при этом

$$x = l \sin\vartheta \cos\varphi, \; y = l \sin\vartheta \sin\varphi, \; z = l \cos\vartheta$$

Если на точку действует сила, например сила тяжести (тогда система называется сферическим маятником), то средствами аналитической механики можно составить динамические уравнения движения для двух координат ϑ и φ, минуя рассмотрение реакций связи в обычных уравнениях

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \; m\ddot{y} = F_y + R_y, \; m\ddot{z} = F_z + R_z$$

(см примеры (19 8) и (20 3))

19.4. Принцип виртуальных перемещений. Обобщенные силы. Необходимое и достаточное условие равновесия системы материальных точек сводится к равенству нулю алгебраической суммы проекции сил, приложенных к каждой точке системы, на каждую из координатных осей. Уравнения, выражающие условия равновесия, имеют вид:

$$F_{ix} + R_{ix} = 0, \; F_{iy} + R_{iy} = 0, \; F_{iz} + R_{iz} = 0, \qquad (19.4)$$

где через R_{ix}, R_{iy} и R_{iz} обозначены алгебраические суммы проекций реакций связей, приложенных к i-й точке. Умножим каждое из этих уравнений на вариацию соответствующей координаты и просуммируем полученные равенства. Получим следующий результат:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\delta_{xi} + F_{iy}\delta_{yi} + F_{iz}\delta_{zi} + R_{ix}\delta_{xi} + R_{iy}\delta_{yi} + R_{iz}\delta_{zi}) = 0. \qquad (19.5)$$

Стоящие в скобках выражения $\vec{F}_i\delta\vec{r}_i$ и $\vec{R}_i\delta\vec{r}_i$ имеют смысл работы силы на виртуальных перемещениях и называются *виртуальной работой*. Поэтому уравнение (19.5) означает, что *сумма виртуальных работ заданных (активных) сил и сил реакции для всех точек системы, находящейся в равновесии, равна нулю.*

Так как равенство (19.5) выведено из условия равновесия, то оно

необходимо для равновесия. Связи в данном случае учтены силами реакции, поэтому систему можно считать свободной, но подверженной действию сил $\vec{F}_i$ и $\vec{R}_i$. В таком случае все вариации $\delta\vec{r}_i$ независимы и из уравнения (19.5) вытекает:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0,$$

т. е. условие (19.5) оказалось достаточным. Доказано, что условия (19.4) и (19.5) равносильные. Однако при теоретическом анализе равновесия систем формулировка условий равновесия через виртуальные работы оказывается предпочтительнее.

Применим условие (19.5) к системе с идеальными связями. Геометрическая сумма сил реакций, приложенных к i-й точке, обусловлена действием всех связей и равна сумме нормальных реакций и сил трения, т. е.

$$\vec{R}_i = \vec{N}_i + \vec{T}_i.$$

Если силы трения отсутствуют, то связь является идеальной. Тогда виртуальная работа силы реакции

$$\vec{R}_i\delta\vec{r}_i = \vec{N}_i\delta\vec{r}_i = 0,$$

так как нормальные реакции работы не совершают.

Итак, *для идеальных связей виртуальная работа сил реакции должна обращаться в нуль*. Это требование по существу есть наиболее общее определение идеальных связей. Если наложенные на систему связи идеальны, силы, приложенные к системе, находящейся в равновесии, должны удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) = 0. \qquad (19.6)$$

Это уравнение выражает принцип *виртуальных перемещений* аналитической статики, гласящий: *виртульная работа заданных сил, приложенных к системе с идеальными связями и находящейся в равновесии, равна нулю.*

Аналитическую формулировку (19.6) принципа виртуальных перемещений обычно связывают с именем Лагранжа. Общность принципа дает возможность получить при его помощи уравнения равновесия как свободной механической системы, так и несвободной. Для *свободной* системы все вариации декартовых координат δx_i, δy_i, δz_i есть произвольные и независимые друг от друга бесконечно малые величины. При этих условиях равенство нулю суммы (19.6) или (19.5) возможно только, если обращаются в нуль коэффициенты при всех вариациях, что и приводит к уравнениям равновесия свободной системы. (Полезно заметить, что введение сил реакции в уравнение (19.5) превращает систему в свободную.)

Получение уравнений равновесия *несвободной* системы из принципа виртуальных перемещений — формулы (19.6) — без учета сил реакции значительно сложнее. Здесь сумма может обращаться в нуль и при неравенстве нулю коэффициентов при вариациях коорди-

нат, которые теперь не являются произвольными и независимыми величинами. Для получения уравнений равновесия в этом случае мы воспользуемся классическим способом, предложенным Лагранжем,— *методом обобщенных координат.*

Метод обобщенных координат состоит в следующем. Выбирают, исходя из условий конкретной задачи, систему независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_3$ — обобщенных координат для данной задачи и, приведя формулы преобразования от декартовых координат к обобщенным (19.3) (время в них входить не будет), производят преобразование уравнения к обобщенным координатам.

Для этой цели варьируют формулы преобразования (19.3) и получают выражения для вариаций декартовых координат:

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad \delta y_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad \delta z_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (19.7)$$

Найденные выражения для вариаций декартовых координат вносят в уравнение виртуальной работы (19.6) и меняют порядок суммирования по индексам i, k. Получают следующее уравнение:

$$\sum_{k=1}^{s} \delta q_k \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = 0.$$

Коэффициенты при вариациях обобщенных координат обозначают Q_k:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \quad (19.8)$$

и называют *обобщенными силами.* После внесения сокращенных обозначений для обобщенных сил принцип виртуальных перемещений в обобщенных координатах получает окончательную форму:

$$\sum_{k=1}^{s} Q_k \delta q_k = 0 \quad (19.9)$$

Вследствие произвольности и независимости вариаций обобщенных координат написанная сумма может обратиться в нуль только при обращении в нуль всех коэффициентов при вариациях. Это и дает уравнение равновесия механической системы:

$$Q_k = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, s). \quad (19.10)$$

Решение системы уравнений (19.10) определит значения обобщенных координат, соответствующих положениям равновесия. Математические трудности задачи при уменьшении числа степеней свободы не возрастают, а наоборот, задача становится более простой.

Обобщенная сила Q_k, определяемая равенством (19.8), представляет собой обобщение понятия механической силы. В зависимости от смысла обобщенной координаты q_k соответствующая ей обобщенная сила Q_k может быть различной величиной. Действительно, произведение $Q_k \delta q_k$, как это следует из уравнения (19.8), всегда должно иметь размерность работы. Отсюда размерность обобщенной силы опреде-

ляется отношением размерности работы к размерности соответствующей обобщенной координаты.

Например, для *угловой координаты* соответствующая ей обобщенная сила есть *момент силы относительно оси*, поворотом вокруг которой осуществляется изменение угла. Если обобщенная координата представляет собой *объем*, то обобщенная сила является *давлением* и т. д. Указанное обстоятельство делает возможным использование метода обобщенных координат и за пределами механики. В частности, он находит себе место в термодинамике.

Во многих случаях при решении простых задач на равновесие по методу обобщенных координат вовсе не требуется устанавливать и использовать формулу преобразования (19.3) от декартовых координат к обобщенным и затем преобразовывать к обобщенным координатам уравнение (19.6), как это было описано выше. Оказывается возможным сразу писать принцип виртуальных перемещений в обобщенных координатах в виде уравнения (19.9), определяя обобщенные координаты непосредственно из задачи.

Итак, мы рассмотрели уравнения равновесия несвободной механической системы. При этом связи предполагались голономными, удерживающими, стационарными, идеальными. Последнее условие не является обязательным. Принцип виртуальных перемещений справедлив и при неидеальных связях, например при наличии сил сухого трения. Если коэффициенты трения известны, то силы трения определяются и их нужно присоединить к заданным.

Пример 19.4 **Вывод условий равновесия тела с осью вращения.**

В качестве первого примера несвободной системы рассмотрим твердое тело, имеющее ось вращения. Выбирая начало координат на оси вращения, определяем положение любой точки тела радиус-вектором $\vec{r}$, а виртуальное перемещение соотношением

$$\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi}\,\vec{r}],$$

где $\delta\vec{\varphi}$ — виртуальный угол поворота тела вокруг оси. Фиксируя точки приложения заданных сил, по формуле (19.7) имеем.

$$\sum_i F_i[\delta\vec{\varphi}\,\vec{r}_i] = \delta\varphi\sum_i [\vec{r}_i\vec{F}_i] = 0$$

Отсюда следует, что для равновесия необходимо равенство нулю суммы моментов сил (относительно оси вращения), приложенных к телу.

Нетрудно распространить вывод на тело с неподвижной точкой. В этом случае должна быть равна нулю сумма моментов сил относительно этой точки.

Пример 19.5 **Вывод условий равновесия для свободного тела.**

Для свободного твердого тела положение каждой точки в пространстве определяется по формуле (3.1).

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}',$$

где $\vec{r}_0$ определяет положение некоторой точки тела — полюса в неподвижной системе, а $\vec{r}'$ — положение любой точки в подвижной системе с началом в полюсе. Отсюда находим связь виртуальных перемещений между собой $\delta\vec{r} = \delta\vec{r}_0 + [\delta\vec{\varphi}\,\vec{r}']$,

и принцип виртуальных перемещений дает формулу

$$\sum_i \vec{F}_i\delta\vec{r}_0 + \sum_i \vec{F}_i[\delta\vec{\varphi}\,\vec{r}'] = \delta\vec{r}_0\sum_i \vec{F}_i + \delta\varphi\sum_i [\vec{r}'\vec{F}_i].$$

Условия равновесия в силу независимости вариаций $\delta\vec{r}_0$ и $\delta\varphi$ выражаются двумя равенствами:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \ \sum_i [\vec{r}'\vec{F}_i] = 0,$$

означающими, что главный вектор и главный момент сил, приложенные к твердому телу, должны быть равны нулю. (Этот вопрос уже рассмотрен в § 17 другим методом.)

Пример 19.6. **Нахождение сил реакции при условии равновесия несвободного тела.**

Включая силы реакции в число приложенных к телу сил, предыдущие условия равновесия свободного тела можно считать условиями равновесия несвободного. Полученные в предыдущем примере уравнения равновесия показывают, что для равновесия тела должны быть равны нулю главный вектор и главный момент:

$$\vec{F} + \vec{R} = 0, \quad \vec{M} + \vec{M}_R = 0.$$

Проецируя эти уравнения на оси координат, получаем шесть скалярных уравнений равновесия, позволяющие найти шесть проекций неизвестных сил и моментов реакций, если активные силы заданы.

Пример 19.7. **Нахождение условий равновесия системы при заданных силах.**

К системе зубчатых колес (пример 19.2 и рис. 19.3) приложены моменты сил M_1, M_2, M_3. Найдем условие равновесия системы. Принцип виртуальных работ для данного случая выражается уравнением

$$M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 - M_3\delta\varphi_3 = 0.$$

Учитывая уравнения связи

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{r_1}{r_2}, \ \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = \frac{r_2}{r_3},$$

имеем:

$$\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\varphi_1, \ \varphi_3 = \frac{r_1}{r_3}\varphi_1,$$

откуда

$$\delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_1, \ \delta\varphi_3 = \frac{r_1}{r_3}\delta\varphi_1.$$

Подставляя вариации координат в первое уравнение и сокращая на $\delta\varphi_1$, получим условие равновесия:

$$M_1 = M_2\frac{r_1}{r_2} + M_3\frac{r_1}{r_3}.$$

19.5. Потенциальные силы. Виды равновесия. Найдем уравнения равновесия системы, в которой заданные силы являются потенциальными.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели две системы уравнений равновесия: в декартовых координатах и обобщенных. Они будут справедливы и для потенциальных сил. Если не стоит специальная задача по определению сил реакции, то система уравнений равновесия в обобщенных координатах предпочтительней, так как сил реакции не содержат. Итак, используем условие (19.10):

$$Q_k = 0 \ (k = 1, 2, 3, ..., s).$$

Если известна потенциальная энергия в декартовых координатах:

$$U = U(x_i, y_i, z_i) \ (i = 1, 2, ..., n),$$

то декартовы проекции потенциальных сил легко вычисляются:

$$F_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i},\ F_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y_i},\ F_{zi} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

В обобщенных координатах потенциальная энергия является сложной функцией последних:

$$U = U\,[x_i(q_k),\ y_i(q_k),\ z_i(q_k)\,].$$

Обобщенная сила

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)$$

после подстановки проекций $\vec{F}_i$ примет вид:

$$Q_k = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_k}. \quad (19.11)$$

Отсюда и следуют уравнения равновесия в случае потенциальных сил:

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0\ (k = 1, 2, ..., s). \quad (19.12)$$

Но условия равновесия (19.12) совпадают с *условиями экстремума функции* $U(q_1, q_2, ..., q_n)$. Значит, *при равновесии системы материальных точек, подверженных действию потенциальных сил, потенциальная энергия системы принимает экстремальное значение.* По виду экстремума равновесие подразделяется *на устойчивое, неустойчивое* и *седлообразное.*

Рассмотрим виды равновесия для одномерного случая (система описывается одной обобщенной координатой). На рисунке 19.4 изображен график потенциальной энергии при наличии точек минимума, максимума и перегиба. *Минимуму* соответствует устойчивое равновесие системы, так как отклонение изображающей точки (в пространстве q) от положения равновесия ведет к росту энергии U, т. е. к возникновению сил, возвращающих систему к равновесию. Наоборот, *максимуму* соответствует неустойчивое равновесие, так как система, выйдя из него, удаляется от равновесия дальше и дальше. Точке перегиба соответствует седлообразное равновесие, система стремится к возвращению в положение равновесия при ее отклонении в сторону увеличения энергии и удаляется от положения равновесия в противоположном случае. Наконец, если график U представлен прямой, параллельной оси q, то равновесие системы безразличное.

Пример 19.8. **Положения равновесия сферического маятника.**

Рассмотрим сферический маятник (см. пример 19.3). Потенциальная энергия его в обобщенных координатах выражается формулой

$$U = mga\cos\vartheta.$$

Отсчет ведется от точки O. Условие равновесия одно:

$$\frac{\partial U}{\partial\vartheta} = -mga\sin\vartheta = 0.$$

Оно приводит к двум точкам экстремума: $\vartheta = 0$ — максимум U, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ — минимум

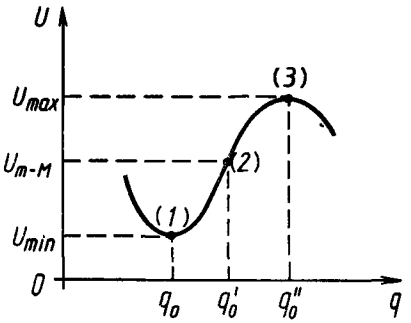

Рис. 19.4.

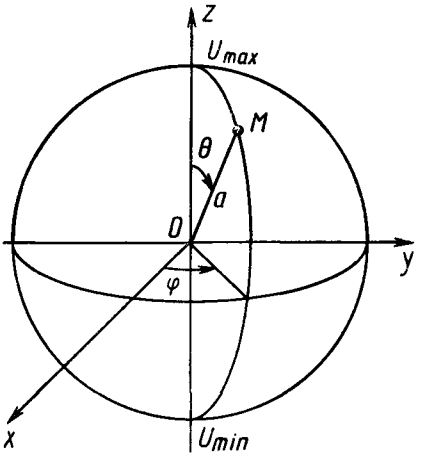

Рис. 19.5.

U. Соответственно это неустойчивое и устойчивое равновесия В данном случае нагляден пространственный рисунок системы, ибо пространство конфигураций (q_1q_2) совпадает с поверхностью сферы (рис. 19 5), а кривая потенциальной энергии — с ее вертикальным сечением.

§ 20. Прииции Даламбера — Лагранжа. Уравиения Лагранжа

20.1. Принцип Даламбера. Общее уравнение механики. Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки и системы могут быть представлены в форме *уравнений равновесия* системы сил. Впервые на это обстоятельство было указано Даламбером.

Воспользуемся дифференциальным уравнением движения (7.4) несвободной материальной точкн в векторной форме и запишем его для системы n точек:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (i = 1, 2, 3, ..., n).$$

Соберем все члены в одну часть равенства и назовем векторы

$$\vec{F}_i^{\text{и}} = -m_i\vec{a} = -m_i\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

даламберовыми силами инерции. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек с введением даламберовых сил инерции приняли вид условий равновесия сил, приложенных к точкам системы:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{F}_i^{\text{и}} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{20.1}$$

Указанное изменение формы записи основных уравнений динамики системы составляет содержание так называемого принципа Даламбера: *если к заданным силам и силам реакции связей добавить силы, равные силам инерции* ($-m_i\vec{a}_i$), *то полученная система будет находиться в равновесии.* В действительности механическая система