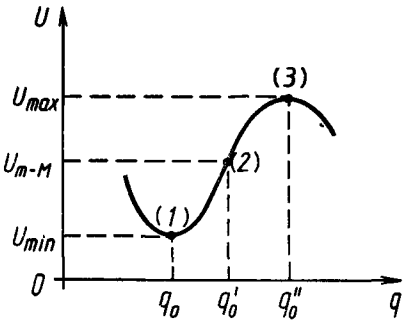

Рис. 19.4.

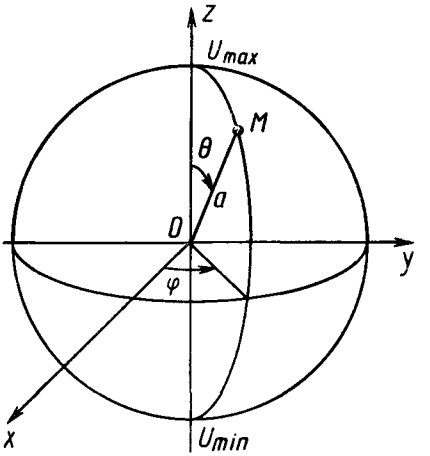

Рис. 19.5.

U. Соответственно это неустойчивое и устойчивое равновесия В данном случае нагляден пространственный рисунок системы, ибо пространство конфигураций (q_1q_2) совпадает с поверхностью сферы (рис. 19 5), а кривая потенциальной энергии — с ее вертикальным сечением.

§ 20. Прииции Даламбера — Лагранжа. Уравиения Лагранжа

20.1. Принцип Даламбера. Общее уравнение механики. Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки и системы могут быть представлены в форме *уравнений равновесия* системы сил. Впервые на это обстоятельство было указано Даламбером.

Воспользуемся дифференциальным уравнением движения (7.4) несвободной материальной точкн в векторной форме и запишем его для системы n точек:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (i = 1, 2, 3, ..., n).$$

Соберем все члены в одну часть равенства и назовем векторы

$$\vec{F}_i^{\text{и}} = -m_i\vec{a} = -m_i\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

даламберовыми силами инерции. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек с введением даламберовых сил инерции приняли вид условий равновесия сил, приложенных к точкам системы:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{F}_i^{\text{и}} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{20.1}$$

Указанное изменение формы записи основных уравнений динамики системы составляет содержание так называемого принципа Даламбера: *если к заданным силам и силам реакции связей добавить силы, равные силам инерции* ($-m_i\vec{a}_i$), *то полученная система будет находиться в равновесии.* В действительности механическая система

не находится в равновесии, но, если бы к точкам системы были приложены силы, равные даламберовым силам инерции, равновесие существовало бы на самом деле.

Математическое выражение принципа Даламбера в декартовых координатах получим при проецировании векторных уравнений (20.1) на оси координат:

$$\begin{cases} F_{ix} + R_{ix} - m\ddot{x}_i = 0, \\ F_{iy} + R_{iy} - m\ddot{y}_i = 0, \\ F_{iz} + R_{iz} - m\ddot{z}_i = 0. \end{cases} \tag{20.2}$$

Значение принципа Даламбера состоит в том, что он открывает возможность применения к решению динамических задач специфических методов аналитической статики и во многих случаях существенно упрощает решение этих задач. Принцип Даламбера оказывается полезным в задачах, где требуется определить силы реакции связей при движении системы (динамические реакции). Но кроме этих непосредственных практических приложений, принцип Даламбера оказывается связующим звеном между принципом виртуальных перемещений и важнейшими уравнениями движения в теории механических (и других) систем, о чем речь будет идти ниже.

Принцип Даламбера может быть объединен с принципом виртуальных перемещений, для чего достаточно умножить векторные уравнения (20.1) на векторы виртуальных перемещений точек системы $\delta\vec{r}_i$ и результаты просуммировать. Если рассматривать случаи идеальных связей, то можно не выписывать виртуальную работу сил реакций, равную нулю. Тогда получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \delta\vec{r}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i = 0. \tag{20.3}$$

Это уравнение называют *общим уравнением механики*. В декартовых координатах общее уравнение механики имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) - \sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{x}_i\delta x_i - \ddot{y}_i\delta y_i + \ddot{z}_i\delta z_i) = 0. \tag{20.4}$$

В словесной формулировке, которой удобно пользоваться при решении конкретных задач, общее уравнение механики сводится к утверждению: *в любой момент времени движения механической системы алгебраическая сумма виртуальных работ заданных сил и даламберовых сил инерции равна нулю.*

Общее уравнение механики и его словесная формулировка выражают объединенный принцип *Даламбера — Лагранжа* — самый общий вариационный принцип. Этот принцип можно использовать в качестве *основной аксиомы механики,* так как из него можно вывести как уравнения равновесия, так и дифференциальные уравнения движения механической системы. Целесообразно заметить, что общее уравнение механики может быть применено и для неидеальных связей. В этом случае с учетом разложения сил реакции на

нормальные и тангенциальные составляющие (силы трения) имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{T}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = 0. \qquad (20.3а)$$

Уравнение (20.3а) применяется для системы со связями так же, как и (20.3).

Пример 20.1 **Применение общего уравнения механики к системе с идеальными связями.**

Система тел, связанных нитью, переброшенной через блок, изображена на рисунке 20.1. Инертными свойствами блока пренебрегаем. Требуется найти ускорения движения тел. Для этого составляем динамические уравнения, используя формулы (20.3), и, выбирая направления $\delta \vec{r}$, как показано на рисунке, получаем

$$-m_1 g \delta r_1 - m_2 g \delta r_2 + m_3 g \delta r_3 - m_1 \ddot{r}_1 \delta r_1 - m_2 \ddot{r}_2 \delta r_2 - m_3 \ddot{r}_3 \delta r_3 = 0$$

Учитывая связь, имеем

$$\delta r_1 = \delta r_2 = \delta r_3, \ \ddot{r}_1 = \ddot{r}_2 = \ddot{r}_3 = a,$$

откуда, сокращая на δr, окончательно получим

$$a = \frac{g(m_3 - m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

При решении задачи совершенно не затрагивались силы реакции, что значительно упростило решение. Если дополнительно стоит задача на нахождение сил реакции, то общее уравнение позволяет легко их отыскать. Например, для первого тела имеем равенство

$$-m_1 g + R_1 - m_1 a = 0,$$

откуда

$$R = m_1 (a + g)$$

Из примера видно, как упрощается решение задачи с помощью общего уравнения механики.

Пример 20.2 **Применение общего уравнения механики в случае неидеальных связей.**

Теперь следует применять уравнение (20.3а). Применим его к задаче, рассмотренной в примере 13.1. Выбирая виртуальные перемещения в направлении движения тел системы (см. рис. 13.1), имеем уравнение

$$-k m_1 g \delta r_1 - k m_2 g \delta r_2 + m_3 g \delta r_3 - m_1 \ddot{r}_1 \delta r_1 - m_2 \ddot{r}_2 \delta r_2 - m_3 \ddot{r}_3 \delta r_3 = 0$$

Учитывая связь

$$\delta r_1 = \delta r_2 = \delta r_3, \ \ddot{r}_1 = \ddot{r}_2 = \ddot{r}_3 = a,$$

сокращая на δr, окончательно получаем

$$a = \frac{g[m_3 - k(m_1 + m_2)]}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Из анализа снова исключена часть сил реакций — натяжение нитей. Их можно найти, применяя общее уравнение к движению каждого тела. Например,

$$-k m_1 g + F_1 - m_1 a = 0,$$
$$F_1 = m_1 (a + kg)$$

Пример 20.3 **Расчет даламберовых сил инерции.**

Рассмотрим фиктивные силы инерции, которые следует приложить к твердому телу, чтобы оно при наличии заданных сил находилось в равновесии.

Если тело массой m движется поступательно с ускорением $\vec{a}$, то к его центру масс прикладывается даламберова сила инерции

$$\vec{F}^{(и)} = -m\vec{a}$$

Вопрос о даламберовых силах инерции при вращении тела решим для случая

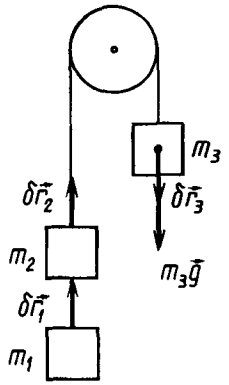

Рис 20 1

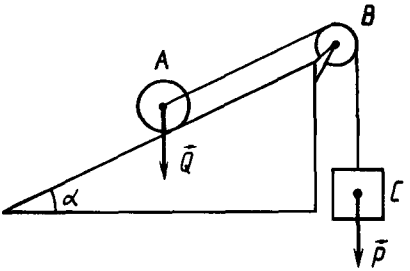

Рис 20 2

вращения вокруг оси, не изменяющей своего направления в пространстве Используя пример 17 1, имеем

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M},$$

где I — момент инерции относительно данной оси, а M — момент приложенных сил Следовательно, нужно учитывать только главный момент тангенциальных сил инерции, который равен

$$\vec{M}^{(и)} = -I\vec{\varepsilon}.$$

Пример 20 4 **Применение общего уравнения к сложной системе.**

Каток A весом Q, скатываясь по наклонной плоскости вниз, поднимает с помощью невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок B, груз C весом P (рис 20 2) При этом блок B вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной к его плоскости Каток A и блок B — однородные круглые диски одинакового веса и радиуса Наклонная плоскость образует угол α с горизонтом Определить ускорение оси катка

Для составления общего уравнения механики (20 3) рассмотрим вначале заданные силы, приложенные к системе Это сила тяжести, приложенная к скатывающемуся катку A, и сила тяжести, приложенная к поднимаемому грузу C

Каток A совершает поступательное и вращательное движение Ускорение $\vec{a}$ оси катка, которое и надо найти, является поступательным ускорением катка В своем вращательном движении каток обладает угловым ускорением, которое обозначим $\vec{\varepsilon}$ Оно направлено перпендикулярно плоскости чертежа к нам Следовательно, к оси катка надо приложить даламберову силу инерции

$$\vec{F}_A^{(и)} = -\frac{Q}{g}\vec{a},$$

а к катку — момент тангенциальных сил инерции, т е

$$\vec{M}_A^{(и)} = -I\vec{\varepsilon} = -\frac{1}{2}\frac{Q}{g}r^2\vec{\varepsilon},$$

где r — радиус катка и $\varepsilon = \dfrac{a}{r}$

Блок B совершает только вращательное ускоренное движение, к нему прикладываем момент тангенциальных сил инерции

$$\vec{M}_B^{(и)} = \vec{M}_A^{(и)},$$

так как центральные моменты инерции обоих дисков одинаковы и тангенциальное ускорение точек на поверхности диска B равно ускорению оси диска A

Груз C совершает только поступательное ускоренное движение, к нему приложим

даламберову силу инерции:

$$F_c = -\frac{P}{g}\vec{a}$$

В качестве виртуального перемещения выберем бесконечно малое перемещение ds оси катка Теперь составим общее уравнение механики:

$$Q\sin\alpha ds - Pds - \frac{Q}{g}ads - 2\frac{1}{2}\frac{Q}{g}r^2\frac{a}{r}\frac{ds}{r} - \frac{P}{g}ads = 0$$

Отсюда

$$a = g\frac{Q\sin\alpha - P}{2Q + P}$$

Считая, что система находится в фиктивном даламберовом равновесии, легко определить силы натяжения нитей. Очевидно, они равны геометрической сумме сил, приложенных к одному из концов данного участка нити. Сила натяжения в сечении нити AB определяется равенством

$$F_{AB} = -Q\sin\alpha + F_A^{(и)},$$

а в сечении нити BC равенством

$$F_{BC} = P + F_C^{(и)}.$$

Задача решена.

20.2. Уравнения Лагранжа. На примерах предыдущего параграфа можно убедиться в том, что с помощью общего уравнения механики значительно упрощается решение задач на движение систем тел, связанных между собой. Но на этом применение общего уравнения механики не заканчивается; из него можно вывести динамические уравнения в обобщенных координатах, упростить анализ движения систем, исключая из них связи.

Применим метод обобщенных координат для получения дифференциальных уравнений движения из общего уравнения механики. Метод обобщенных координат приводит к исключительно важному результату. Он дает *общий вид дифференциальных уравнений движения в обобщенных координатах, называемых уравнениями Лагранжа* (второго рода). Эти уравнения позволяют для каждой задачи на несвободную систему пользоваться наиболее удобными и естественными величинами при описании движения системы, исключая из рассмотрения связи и силы реакции. Лагранжевы уравнения оказываются полезными и для свободных тел и точек, так как имеют *инвариантную* (скалярную) форму во всех системах координат, а это позволяет легко составить уравнения в наиболее удобной системе координат, не пользуясь громоздкими формулами перехода (например, от декартовых к сферическим).

Математическая задача заключается в преобразовании уравнения (20.3) к независимым параметрам $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ — обобщенным координатам механической системы, связанным с декартовыми координатами, заданными формулами преобразования (19.3). Прежде всего выражаем вариации декартовых координат через вариации обобщенных. Получаем соотношения (19.7). После подстановки найденных вариаций в общее уравнение механики (20.4) изменим порядок суммирования и введем сокращенные обозначения (19.8)

для обобщенных сил. Получим следующий результат:

$$\sum_{k=1}^{s} Q_k \delta q_k - \sum_{k=1}^{s} \delta q_k \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = 0. \qquad (20.5)$$

Для завершения преобразования остается выразить здесь вторые производные декартовых координат через обобщенные. Это преобразование проводим способом, указанным Лагранжем. Дифференцируя по времени формулы преобразования (19.3), получаем:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \dfrac{\partial x_i}{\partial t}, \\ \dot{y}_i = \sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \dfrac{\partial y_i}{\partial t}, \\ \dot{z}_i = \sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \dfrac{\partial z_i}{\partial t}. \end{cases} \qquad (20.6)$$

Производные обобщенных координат по времени q_1, q_2, ..., q_s *называют обобщенными скоростями* (см. § 1). Они действительно дают обобщение понятию скорости, так как в зависимости от смысла соответствующей координаты могут представлять угловые скорости, секторные и др. Так как частные производные

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial q_k} -$$

известные функции обобщенных координат по времени, то формулы (20.6) показывают, что производные декартовых координат по времени являются *линейными функциями* обобщенных скоростей. Заметим, если связи стационарные, то время t не входит в формулы преобразования координат (19.3) и производные декартовых координат по времени являются *линейными однородными* функциями обобщенных скоростей.

Для дальнейшего преобразования уравнения (20.3) отметим существование следующих тождеств:

$$\begin{cases} \ddot{x}_i \dfrac{\partial x_i}{\partial q_k} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \dfrac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) - \dot{x}_i \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k} \right), \\ \ddot{y}_i \dfrac{\partial y_i}{\partial q_k} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{y}_i \dfrac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) - \dot{y}_i \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial q_k} \right), \\ \ddot{z}_i \dfrac{\partial z_i}{\partial q_k} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{z}_i \dfrac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) - \dot{z}_i \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial z_i}{\partial q_k} \right). \end{cases} \qquad (20.7)$$

Далее эти тождества преобразуем, пользуясь (20.6). Обобщенные координаты q_k и обобщенные скорости $\dot{q}_k$ независимы. Поэтому, составляя частные производные по обобщенным скоростям от равенства (20.6), приходим к тождествам

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k}. \qquad (20.8)$$

Дифференцируя равенства (20.6) частным образом по какой-либо

обобщенной координате q_k, имеем:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_k}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2 \partial q_k}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial q_k}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k}.$$

С другой стороны, $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ есть функция обобщенных координат по времени, т. е. является сложной функцией времени, зависящей от времени через промежуточные функции $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_n(t)$ (и явно). Составляя полную производную по времени этой функции по обычным правилам, получаем следующий результат:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t}.$$

Правые части двух последних равенств одинаковые, что указывает на существование следующего тождества:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}. \tag{20.9}$$

Тождества (20.8) и (20.9) позволяют представить первое тождество (20.7) в другом виде:

$$\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right).$$

Аналогичные преобразования имеют место и для остальных двух тождеств (20.7). После умножения каждого из них на массу i-й точки m_i суммируем почленно и получаем важное равенство:

$$m_i\left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left[m_i \frac{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2}{2}\right] - \\ - \frac{\partial}{\partial q_k}\left[m_i \frac{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2}{2}\right].$$

Выражения, стоящие в нем в квадратных скобках, представляют собой кинетическую энергию T_i i-й точки системы. По этой причине последнее равенство можно записать кратко:

$$m_i\left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T_i}{\partial q_k}.$$

Внесем это выражение в общее уравнение механики (20.5), после чего последнее приобретает следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{s} Q_k \delta q_k - \sum_{k=1}^{s} \delta q_k \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T_i}{\partial q_k}\right) = 0.$$

Обозначив через $T = \sum_{i=1}^{n} T_i$ кинетическую энергию системы, записываем уравнение в виде:

$$\sum_{k=1}^{s}\left(Q_k - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\delta q_k = 0.$$

Вариации обобщенных координат — произвольные и независимые величины, и равенство нулю написанной суммы возможно только при обращении в нуль сомножителей при вариациях обобщенных координат. Приравнивание их нулю приводит нас к искомым дифференциальным уравнениям движения системы в обобщенных координатах — *уравнениям Лагранжа:*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \ (k = 1, 2, ..., s). \qquad (20.10)$$

Для составления дифференциальных уравнений движения конкретной механической системы с помощью (20.10) необходимо иметь выражение кинетической энергии в выбранных координатах и значение обобщенных сил. Тогда составление дифференциальных уравнений сводится к выполнению операций дифференцирования, указанных в общей форме уравнений (20.10). Способ нахождения обобщенных сил рассмотрен ранее (§ 19) как переход от декартовых координат к обобщенным. Аналогичное преобразование может быть выполнено и для кинетической энергии (см. пример 20.8). Однако эти преобразования имеют скорее теоретический, а не практический смысл. На практике необходимые величины определяют, минуя указанные преобразования.

Пример 20.5. **Составление и решение уравнений Лагранжа.**

В зацеплении зубчатых колес, показанном на рисунке 19.3, колесо *1* приводится в движение моментом M_1. К колесу *2* приложен момент сопротивления M_2 и к колесу *3* — момент сопротивления M_3. Найти угловое ускорение первого колеса, считая колеса однородными дисками, массы которых m_1, m_2, m_3 и радиусы r_1, r_2, r_3.

Если бы каждое колесо могло вращаться самостоятельно (связи отбрасываем), то пришлось бы ввести три независимых угла поворота: φ_1, φ_2 и φ_3. Однако можно написать два уравнения связей:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = \frac{r_2}{r_3}.$$

Система колес имеет одну степень свободы, и в качестве обобщенной координаты целесообразно выбрать угол поворота φ_1 первого колеса Уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\frac{d}{dT}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1.$$

Кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий вращения трех колес, которые находим по формуле (18.5): $T = \frac{1}{2}(I_1\dot{\varphi}_1^2 + I_2\dot{\varphi}_2^2 + I_3\dot{\varphi}_3^2)$.

Пользуясь уравнениями связи, записываем кинетическую энергию как функцию только $\dot{\varphi}_1$: $T = \frac{1}{4}(m_1 + m_2 + m_3)\, r_1^2\dot{\varphi}_1^2$

Для определения обобщенной силы пользуемся выражением виртуальной работы. За виртуальное перемещение выбираем поворот колеса вправо на угол $\delta\varphi_1$. Виртуальная работа находится по формуле $\delta A_1 = M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 - M_3\delta\varphi_3$

Исключаем зависимые вариации. Для этого варьируем уравнения связи. Получаем:

$$\delta A_1 = \left(M_1 - \frac{r_1}{r_2}M_2 - \frac{r_1}{r_3}M_3 \right)\delta\varphi_1.$$

Рассчитываем обобщенную силу:

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta\varphi_1} = M_1 - \frac{r_1}{r_2}M_2 - \frac{r_1}{r_3}M_3.$$

Выполняя указанные в уравнении Лагранжа дифференцирования, найдем угловое ускорение первого колеса:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{2\left(M_1 - \frac{r_1}{r_2}M_2 - \frac{r_1}{r_3}M_3\right)}{(m_1 + m_2 + m_3)r_1^2}.$$

Далее нетрудно найти угловые ускорения остальных колес.

Пример 20.6. **Применение уравнения Лагранжа для получения уравнений движения материальной точки в разных системах координат.**

В сферических координатах кинетическая энергия точки (см. пример 1.4) вычисляется по формуле $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2)$.

Принимая r, ϑ, φ за обобщенные координаты, имеем с помощью (20.10) уравнения движения:

$$\begin{cases} m[\ddot{r} - r(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2)] = Q_r, \\ m\left[\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) - r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2\right] = Q_\vartheta, \\ m\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}) = Q_\varphi. \end{cases} \quad (а)$$

Нетрудно найти и обобщенные силы (формулы (19.8)):

$$\begin{cases} Q_r = F_x\sin\vartheta\cos\varphi + F_y\sin\vartheta\sin\varphi + F_z\cos\vartheta = F_r, \\ Q_\vartheta = F_x r\cos\vartheta\cos\varphi - F_y r\cos\vartheta\sin\varphi - F_z r\sin\vartheta = rF_\vartheta, \\ Q_\varphi = -F_x r\sin\vartheta\sin\varphi + F_y\sin\vartheta\cos\varphi = r\sin\vartheta F_\varphi. \end{cases} \quad (б)$$

Уравнения движения составлены. Сравнивая (а) и (б), легко получаем приведенные ранее в кинематике формулы ускорения в сферической системе:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2), \\ a_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) - r\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}). \end{cases}$$

В цилиндрических координатах (см. пример 1.5) кинетическая энергия точки имеет вид:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

В координатах ρ, φ, z уравнения Лагранжа (20.10) таковы:

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \dot{\rho}\dot{\varphi}^2) = Q_\rho, \\ m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = Q_\varphi, \\ m\ddot{z} = Q_z. \end{cases}$$

Обобщенные силы находим с помощью формулы (19.8) и формул перехода от декартовых к цилиндрическим координатам ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$):

$$\begin{cases} Q_\rho = F_x\cos\varphi + F_y\sin\varphi = F_\rho, \\ Q_\varphi = -F_x\rho\sin\varphi + F_y\rho\cos\varphi = \rho F_\varphi, \\ Q_z = F_z. \end{cases}$$

Уравнения движения составлены.

Пример 20.7. **Лагранжевы уравнения движения свободного твердого тела.**

Положение твердого тела определяется шестью независимыми координатами x_0, y_0, z_0, ψ, θ, φ. Если взять их в качестве обобщенных координат, то искомые уравнения будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_0} - \frac{\partial T}{\partial x_0} &= Q_{x_0}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{y}_0} - \frac{\partial T}{\partial y_0} &= Q_{y_0}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{z}_0} - \frac{\partial T}{\partial z_0} &= Q_{z_0}, \end{aligned}\right\} \quad (а) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial\psi} &= Q_\psi, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} &= Q_\varphi, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial\theta} &= Q_\theta. \end{aligned}\right\} \quad (б)$$

Первые три уравнения описывают поступательное движение твердого тела, а последующие — вращательное.

Система уравнений поступательного движения упрощается, если принять за полюс центр масс тела C. Как видно из формулы (18.2), кинетическая энергия не будет зависеть от координат центра масс:

$$\frac{\partial T}{\partial x_c} = \frac{\partial T}{\partial y_c} = \frac{\partial T}{\partial z_c} = 0.$$

Кроме того, обобщенными силами будут проекции главного вектора сил, приложенных к твердому телу, т. е.

$$Q_x = F_x,\ Q_y = F_y,\ Q_z = F_z.$$

Поэтому уравнения (а) поступательного движения твердого тела можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c} = F_x,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_c} = F_y,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_c} = F_z.$$

Используя формулу для кинетической энергии (18.2), окончательно приходим к уравнениям движения центра масс:

$$ma_{cx} = F_x,\ ma_{cy} = F_y,\ ma_{cz} = F_z,$$

с которыми встречались в § 17.

Уравнения вращательного движения получим, если воспользуемся выражением для кинетической энергии тела (18.3) и подставим в него проекции угловой скорости на оси подвижной системы, выражающейся формулами (2.13). Получим:

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi)^2 + \frac{I_2}{2}(\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi)^2 + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})^2.$$

Обобщенными силами являются моменты сил относительно осей и линии узлов (см. рис. 2.2):

$$Q_\psi = M_\psi,\ Q_\varphi = M_\varphi,\ Q_\vartheta = M_\vartheta.$$

Уравнения движения (б) после подстановки в них выражения через углы Эйлера оказываются весьма сложными. В § 17 рассматривались динамические уравнения Эйлера (17.5) в проекциях на оси подвижной системы. Они также приводятся к переменным ψ, ϑ, φ. Однако из уравнений (17.5) только третье уравнение совпадает с уравнением Лагранжа (б) для переменной ψ, ибо только обобщенная сила Q_ψ совпадает с проекцией момента на ось Oz'. Остальные два уравнения написаны для проекций моментов на другие оси: Ox' и Oy'. Уравнения решены для немногих частных случаев, например для свободного симметричного волчка (см. пример 17.3).

Пример 20.8. **Общее выражение кинетической энергии в обобщенных координатах.**

Во всех предыдущих примерах выражение кинетической энергии в обобщенных координатах оказывалось заранее известным или находилось в частном случае. Рассмотрим в общем виде преобразование выражения кинетической энергии к обобщенным координатам. Исходим из известного выражения кинетической энергии в декартовых координатах:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

и формул преобразования декартовых координат к обобщенным (19.3). Пользуясь формулами (20.6), выражающими производные декартовых координат по времени через обобщенные скорости, составляем выражения для квадратов производных декартовых координат, входящих в выражение кинетической энергии. Применяя правило сокращенного возведения в квадрат суммы, получаем:

$$\dot{x}_i^2 = \sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l + 2\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}\dot{q}_k + \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2.$$

Аналогичные выражения получаются для $\dot{y}_i^2$ и $\dot{z}_i^2$. После подстановки найденных выражений в выражение кинетической энергии в декартовых координатах мы должны получить искомый результат. Для того чтобы не записывать его в подробной, очень громоздкой форме, предварительно введем сокращенные обозначения:

$$\begin{cases} A_{kl} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\dfrac{\partial x_i}{\partial q_l} + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_k}\dfrac{\partial y_i}{\partial q_l} + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_k}\dfrac{\partial z_i}{\partial q_l}\right), \\ A_k = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\dfrac{\partial x_i}{\partial t} + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_k}\dfrac{\partial y_i}{\partial t} + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_k}\dfrac{\partial z_i}{\partial t}\right), \\ A_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\left[\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right]. \end{cases} \tag{20.11}$$

Указанные выражения являются известными функциями обобщенных координат и времени. Использование этих сокращенных обозначений приводит нас к окончательному выражению кинетической энергии системы в обобщенных координатах:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{s} A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{s} A_k\dot{q}_k + A_0. \tag{20.12}$$

Кинетическая энергия оказывается *квадратичной функцией обобщенных скоростей,* коэффициентами в которой являются функции обобщенных координат и времени.

Когда движение системы ограничено стационарными связями, выражение кинетической энергии значительно упрощается. В этом случае формулы преобразования (19.3) не содержат времени и частные производные декартовых координат по времени обращаются в нули. В нули обращаются и коэффициенты A_k и A_0 при линейных членах квадратичной формы (20.12). Кинетическая энергия в этом случае является *однородной* квадратичной функцией обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k,\,l}^{s} A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l.$$

Коэффициенты при квадратах и произведениях обобщенных скоростей A_{kl} называются *коэффициентами инерции системы.* В частности, коэффициенты инерции могут представлять *массу, момент инерции* или *произведение инерции системы.*

Из алгебры известно, что однородную квадратичную форму можно привести к сумме квадратов линейным однородным преобразованием. На этом основании утверждаем, что, выбирая новые обобщенные координаты для данной системы, можно получить выражение кинетической энергии в виде чистой *суммы квадратов* обобщенных скоростей, т. е. в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s} A_{kk}\dot{q}_k^2. \tag{20.13}$$

Обобщенные координаты, в которых кинетическая энергия является однородной квадратной функцией обобщенных скоростей, называются *нормальными* координатами данной механической системы.

При решении конкретных задач приведенными выше общими формулами для кинетической энергии обычно не пользуются. Выражение кинетической энергии в обобщенных координатах часто оказывается возможным записать, используя теорему Кёнига, как это было показано на примерах. Однако общие формулы необходимы в теории.

§ 21. Уравнения Лагранжа для потенциальных и обобщенно-потенциальных сил

21.1. Потенциальные силы. Лагранжиан. Дифференциальные уравнения Лагранжа заметно упрощаются, если система находится под действием *потенциальных* сил.