Аналогичные выражения получаются для $\dot{y}_i^2$ и $\dot{z}_i^2$. После подстановки найденных выражений в выражение кинетической энергии в декартовых координатах мы должны получить искомый результат. Для того чтобы не записывать его в подробной, очень громоздкой форме, предварительно введем сокращенные обозначения:

$$\begin{cases} A_{kl} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\dfrac{\partial x_i}{\partial q_l} + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_k}\dfrac{\partial y_i}{\partial q_l} + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_k}\dfrac{\partial z_i}{\partial q_l}\right), \\ A_k = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\dfrac{\partial x_i}{\partial t} + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_k}\dfrac{\partial y_i}{\partial t} + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_k}\dfrac{\partial z_i}{\partial t}\right), \\ A_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\left[\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right]. \end{cases} \tag{20.11}$$

Указанные выражения являются известными функциями обобщенных координат и времени. Использование этих сокращенных обозначений приводит нас к окончательному выражению кинетической энергии системы в обобщенных координатах:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{s} A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{s} A_k\dot{q}_k + A_0. \tag{20.12}$$

Кинетическая энергия оказывается *квадратичной функцией обобщенных скоростей,* коэффициентами в которой являются функции обобщенных координат и времени.

Когда движение системы ограничено стационарными связями, выражение кинетической энергии значительно упрощается. В этом случае формулы преобразования (19.3) не содержат времени и частные производные декартовых координат по времени обращаются в нули. В нули обращаются и коэффициенты A_k и A_0 при линейных членах квадратичной формы (20.12). Кинетическая энергия в этом случае является *однородной* квадратичной функцией обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k,\,l}^{s} A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l.$$

Коэффициенты при квадратах и произведениях обобщенных скоростей A_{kl} называются *коэффициентами инерции системы.* В частности, коэффициенты инерции могут представлять *массу, момент инерции* или *произведение инерции системы.*

Из алгебры известно, что однородную квадратичную форму можно привести к сумме квадратов линейным однородным преобразованием. На этом основании утверждаем, что, выбирая новые обобщенные координаты для данной системы, можно получить выражение кинетической энергии в виде чистой *суммы квадратов* обобщенных скоростей, т. е. в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s} A_{kk}\dot{q}_k^2. \tag{20.13}$$

Обобщенные координаты, в которых кинетическая энергия является однородной квадратной функцией обобщенных скоростей, называются *нормальными* координатами данной механической системы.

При решении конкретных задач приведенными выше общими формулами для кинетической энергии обычно не пользуются. Выражение кинетической энергии в обобщенных координатах часто оказывается возможным записать, используя теорему Кёнига, как это было показано на примерах. Однако общие формулы необходимы в теории.

§ 21. Уравнения Лагранжа для потенциальных и обобщенно-потенциальных сил

21.1. Потенциальные силы. Лагранжиан. Дифференциальные уравнения Лагранжа заметно упрощаются, если система находится под действием *потенциальных* сил.

Пусть силы, приложенные к точкам системы, потенциальные. Тогда в соответствии с формулой (19.11) для обобщенных сил имеем их выражения через потенциальную энергию $U = U(q_1 q_2 ... q_s, t)$:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

Следовательно, обобщенные силы также являются потенциальными. Внесем выражения потенциальных сил в дифференциальные уравнения (20.10). Если примем во внимание, что потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей, т. е. $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0$, то дифференциальным уравнениям можно придать следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(T - U) - \frac{\partial}{\partial q_k}(T - U) = 0.$$

Определим функцию обобщенных координат, скоростей и времени равенством

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = T - U, \tag{21.1}$$

где L называется *функцией Лагранжа* или *лагранжианом* системы. Тогда уравнения Лагранжа (20.10) движения системы получают следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \ (k = 1, 2, 3, ..., s). \tag{21.2}$$

Для составления дифференциальных уравнений движения системы с потенциальными силами оказывается, таким образом, достаточным знание лагранжиана системы. При стационарных связях и стационарном силовом поле лагранжиан не зависит явно от времени и является функцией только обобщенных координат и скоростей, а при нестационарных связях и нестационарных силах он явно зависит и от времени. Нетрудно видеть, что лагранжиан задается *неоднозначно:* прибавление к нему любой величины, не зависящей от q_k и $\dot{q}_k$ явно, не изменяет уравнений (21.2). Кроме этого, *прибавление полной производной по времени от произвольной функции обобщенных координат также не изменяет уравнений.*

Покажем это. Пусть $f(q_k)$ — произвольная функция. Рассмотрим новый лагранжиан: $L' = L + \frac{d}{dt} f(q_k) = L + \sum_s \frac{\partial f}{\partial q_s}\dot{q}_s$.

Составим для него уравнение (21.2):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial f}{\partial q_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_s \frac{df}{\partial q_s}\dot{q}_s = 0.$$

Раскрывая скобки и производя дифференцирование по времени во втором слагаемом, имеем:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_s \frac{\partial f}{\partial q_s}\dot{q}_s - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_s \frac{\partial f}{\partial q_s}\dot{q}_s = 0,$$

т. е. приходим к уравнению для прежней функции Лагранжа L, так как члены с суммами взаимно уничтожаются.

В процессе вывода уравнений Лагранжа (20.10) и (21.2) было выполнено преобразование координат (19.3), которое может рассматриваться как переход к любой новой системе координат в той же физической системе отсчета либо переход к другой инерциальной и даже неинерциальной системе отсчета. *В любой системе отсчета и системе координат,* т. е. в любых координатах q_k *уравнения имеют один и тот же вид,* т. е. *они инвариантны по отношению к выбору систем координат и систем отсчета.* Эта выдающаяся особенность уравнений Лагранжа делает их весьма ценными для теории. (Инвариантность уравнений для неинерциальных систем рассмотрена ниже, в примере 21.6.)

Пример 21.1. **Составление лагранжиана для двойного плоского маятника** (рис. 21.1).

Кинетическая и потенциальная энергии являются величинами аддитивными, поэтому функция Лагранжа системы равна сумме функций Лагранжа для точек m_1 и m_2: $L = L_1 + L_2$. Обозначив угол между отрезком a и вертикалью через φ, имеем для кинетической энергии точки $T_1 = \frac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\varphi}^2$, где скорость находится по формуле составляющей скорости в полярных координатах (1.9). Отсчитав высоту поднятия маятника от точки O, получаем потенциальную энергию в виде $U_1 = -m_1 g a \cos\varphi$.

Поэтому
$$L_1 = \frac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\varphi}^2 + m_1 g a \cos\varphi.$$

Введем угол ϑ между отрезком b и вертикалью. Чтобы найти кинетическую энергию T_2 точки m_2, выразим ее декартовы координаты x_2 и y_2 (начало координат в точке O; ось y направлена вниз по вертикали, а ось x — влево по горизонтали) через углы φ и ϑ:
$$x_2 = a \sin\varphi + b \sin\vartheta,$$
$$y_2 = a \cos\varphi + b \cos\vartheta,$$
откуда
$$\dot{x}_2 = a \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + b \cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta}, \quad \dot{y}_2 = -a \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} - b \sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta}.$$

Пользуясь этими выражениями, получаем кинетическую энергию системы:
$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m_2 [a^2 \dot{\varphi}^2 + 2ab \cos((\varphi - \vartheta)\, \dot{\varphi}\dot{\vartheta}) + b^2 \dot{\vartheta}^2].$$

Вычитая из нее потенциальную энергию $U_2 = -m_2 g (a \cos\varphi + b \cos\vartheta)$, получим:
$$L_2 = \frac{1}{2} m_2 [a^2 \dot{\varphi}^2 + b^2 \dot{\vartheta}^2 + 2ab \dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos(\varphi - \vartheta)] + m_2 g (a \cos\varphi + b \cos\vartheta).$$

Итак, лагранжиан для двойного плоского маятника найден и имеет вид:
$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) a^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 b^2 \dot{\vartheta}^2 + m_2 ab \dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos(\varphi - \vartheta) +$$
$$+ g (m_1 + m_2) a \cos\varphi + m_2 g b \cos\vartheta.$$

Пример 21.2. **Составление уравнения движения эллиптического маятника.** Он состоит из ползуна массой m_1, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика массой m_2, соединенного с ползуном стержнем AB длиной l. Стержень может вращаться вокруг оси A, связанной с ползуном и перпендикулярной к плоскости чертежа (рис. 21.2). Массой стержня пренебречь.

Оба тела можно считать материальными точками. Положение их определяется координатами x_1, y_1 и x_2, y_2. Видим, что между ними и углом отклонения стержня от вертикали можно установить связь: $x_2 = l \cos\varphi$, $y_2 = y_1 + l \sin\varphi$.

Система имеет две степени свободы, а за обобщенные координаты целесообразно выбрать y_1 и φ.

Уравнения Лагранжа имеют общий вид:
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

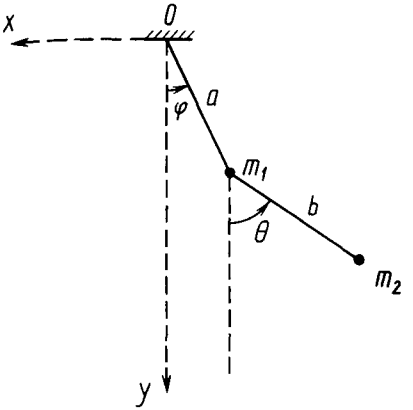

Рис. 21.1.

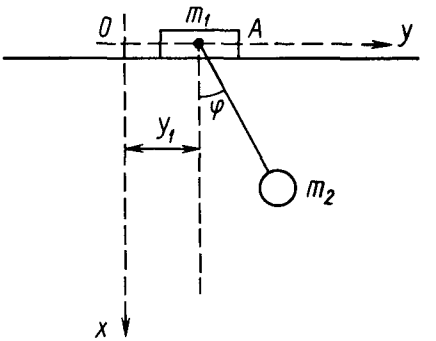

Рис. 21.2.

Составим лагранжиан системы:

$$L = L_1 + L_2 = (T_1 + T_2) - (U_1 + U_2).$$

Потенциальную энергию нормируем условием

$$U = U_1\Big|_{x_1 = 0} + U_2\Big|_{x_2 = 0} = 0.$$

Вычислим теперь кинетическую энергию, потенциальную энергию и лагранжиан:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2,\ T_2 = \frac{1}{2} m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m_2(\dot{y}_1^2 + 2l\cos\varphi\dot{y}_1\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2),$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\cos\varphi\dot{y}_1\dot{\varphi},$$

$$U = -m_2 g l\cos\varphi,$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\cos\varphi\dot{y}_1\dot{\varphi} + m_2 g l\cos\varphi.$$

Используя найденную функцию Лагранжа, получаем для эллиптического маятника уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\left\{(m_1 + m_2)\dot{y}_1 + m_2 l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right\} = 0,$$

$$l\ddot{\varphi} + \cos\varphi\ddot{y}_1 + g\sin\varphi = 0.$$

Из первого уравнения сразу следует первый интеграл движения: $(m_1 + m_2)\dot{y}_1 + m_2 l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = C_1$, который можно использовать при решении уравнений — нахождении $y_1 = y_1(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

Пример 21.3. **Составление уравнений для сферического маятника.**

Он был рассмотрен в примерах (19.3) и (19.8). Функцию Лагранжа найдем, используя формулы скорости в сферических координатах (см. пример 1.4) и формулу потенциальной энергии (см. пример 19.8):

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\cdot\dot{\varphi}^2) - mgl\cos\vartheta.$$

Уравнения Лагранжа в координатах ϑ и φ имеют общий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = 0,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0,$$

откуда

$$ml^2\ddot{\vartheta} - ml^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \cdot \dot{\varphi}^2 - mgl \sin\vartheta = 0,$$

$$\frac{d}{dt} ml^2 \sin^2\vartheta \cdot \dot{\varphi} = 0.$$

Из второго уравнения сразу следует первый интеграл

$$ml^2 \sin^2\vartheta \cdot \dot{\varphi} = C_1,$$

который нужно использовать далее для нахождения кинематических уравнений движения.

Пример 21.4. **Составление уравнений Лагранжа для свободной точки.**

Метод Лагранжа может быть с успехом применен не только к сложным системам со связями, но и к свободной точке, находящейся в потенциальном поле. При этом *сила при описании движения и векторные уравнения заменяются соответственно* функцией Лагранжа и скалярными уравнениями Лагранжа. В качестве примера рассмотрим свободную материальную точку в однородном поле (поле тяготения). За обобщенные координаты возьмем декартовы, оси Ox и Oy расположим в плоскости горизонта, а ось Oz направим вертикально вверх. Располагая функцией Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

имеем:

$$\frac{d}{dt} m\dot{x} = 0, \quad \frac{d}{dt} m\dot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg.$$

Это рассматривавшиеся ранее, в примере 6.1, уравнения свободного падения. Их интегралы находятся разделением переменных:

$$x = x_0 + v_{0x}t, \quad y = y_0 + v_{0y}t, \quad z = z_0 + v_{0z}t - \frac{gt^2}{2}.$$

(Уместно заметить, что речь о векторах сил в задаче не шла — их заменила функция Лагранжа. Не было и проектирования векторных уравнений на оси.)

21.2. Уравнение Лагранжа для обобщенно-потенциальных сил. В § 21 мы ввели функцию Лагранжа, с помощью которой задается движение системы с потенциальными силами, зависящими только от координат и времени. Рассмотрим теперь силы, зависящие также от скорости и удовлетворяющие условию:

$$Q_k(\dot{q}_k, q_k, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k}, \tag{21.3}$$

где $U(\dot{q}_k, q_k, t)$ носит название *обобщенного потенциала*. Такие силы называются *обобщенно-потенциальными*.

Подставляя в уравнение Лагранжа (20.10) вместо обычной силы обобщенно-потенциальную, приведем уравнение к виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = 0. \tag{21.4}$$

Это уравнение по форме не отличается от уравнения для обычных потенциальных сил, но его лагранжиан L', имея прежние переменные, представляет разность кинетической энергии и обобщенного потенциала, т. е.

$$L' = T - U(q_k, \dot{q}_k, t). \tag{21.5}$$

Так как запись лагранжиана с обобщенным потенциалом в общем виде не отличается от записи с обычным, то для уравнения Лагранжа

с обобщенно-потенциальными силами нет надобности вводить специальные обозначения:

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t), \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

Так как обобщенно-потенциальная сила не зависит от обобщенных ускорений, то обобщенный потенциал является линейной функцией обобщенных скоростей, что видно из определения обобщенно-потенциальной силы. Обобщенный потенциал напишем в следующем виде:

$$U = \sum_{k=1}^{s} a_k(q_k, t)\dot{q}_k + U_0(q_k, t) = U_1 + U_0.$$

Здесь $U_1 = U_1(\dot{q}_k, q_k, t)$ — потенциальная энергия, зависящая от скорости, $U_0(q_k, t)$ — обычная потенциальная энергия, $a_k(q_k, t)$ — коэффициент.

Кинетическая энергия является квадратичной функцией обобщенных скоростей и выражается формулой (20.12). Обозначим слагаемые в этой формуле соответственно через T_2, T_1, T_0 и запишем формулу кратко:

$$T = T_2 + T_1 + T_0.$$

Обобщенный лагранжиан является квадратичной функцией обобщенных скоростей вида

$$L = T_2 + (T_1 - U_1) + (T_0 - U_0). \tag{21.6}$$

Индексы показывают степень обобщенной скорости, от которой зависят слагаемые.

Обобщенно-потенциальные силы резко расширяют сферу применения уравнений Лагранжа (в форме (21.2)), ибо *фундаментальные силы природы (гравитационные и электромагнитные) относятся соответственно к потенциальным и обобщенно-потенциальным.* Обобщенно-потенциальными являются и *силы инерции,* что позволяет применять уравнения Лагранжа в неинерциальных системах отсчета.

В общем случае, кроме потенциальных и обобщенно-потенциальных сил, в системе действуют непотенциальные диссипативные силы, рассеивающие механическую энергию. Располагая лагранжианом для обобщенно-потенциальных сил, имеем уравнения Лагранжа для общего случая:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k, \tag{21.7}$$

где через Q_k обозначаем все обобщенные непотенциальные силы.

Пример 21.5. **Сила Лоренца.**

Рассмотрим важнейший пример обобщенно-потенциальной силы. В электродинамике показывается, что на точечный электрический заряд q, движущийся в электромагнитном поле со скоростью $\vec{v}$, действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_л = q\vec{E} + q[\vec{v}\,\vec{B}],$$

где

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

$\varphi = \varphi(x, y, z, t)$, $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$ — скалярный и векторный потенциалы поля. Выражение

$$U = q\varphi - q\vec{A}\vec{v} \tag{21.8}$$

оказывается обобщенным потенциалом для заряда в электромагнитном поле. В этом убеждаемся, находя обобщенно-потенциальную силу по формуле (21.3):

$$\vec{Q} = -q\frac{d}{dt}\vec{A} - q\cdot\operatorname{grad}\varphi + q\cdot\operatorname{grad}(\vec{A}\,\vec{v}).$$

После выполнения действий и с помощью формул векторного анализа (приложение II, № 7) имеем:

$$\vec{Q} = -q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - q(\vec{v}\nabla)\vec{A} + q(\vec{v}\nabla)\vec{A} +$$

$$+ q[\vec{v}\operatorname{rot}\vec{A}] - q\cdot\operatorname{grad}\varphi = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}] = \vec{F}_л.$$

Так как кинетическая энергия свободной материальной точки в данном случае известна, т. е.

$$T = \frac{mv^2}{2},$$

то нетрудно убедиться, что уравнения Лагранжа (20.10) дают:

$$\frac{d}{dt}m\vec{v} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}],$$

т. е. уравнение движения заряженной материальной точки в электромагнитном поле.

Пример 21.6. **Преобразование функции Лагранжа к неинерциальной системе отсчета.**

Рассмотрим материальную точку m, находящуюся в потенциальном поле. В неподвижной инерциальной системе отсчета

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\vec{r}). \tag{21.9}$$

Перейдем к произвольно движущейся системе. Из формул (3.5) и (3.6) видно, что

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{r}'],$$

а

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}').$$

Выполняя подстановку значений $\vec{v}$ и U в (21.9), получаем выражение функции Лагранжа в инерциальной системе:

$$L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} + \frac{m}{2}[\vec{\omega}\,\vec{r}']^2 + m\vec{v}'[\vec{\omega}\,\vec{r}'] + \frac{1}{2}mv_0^2 + m\vec{v}_0\{\vec{v}' + [\vec{\omega}\,\vec{r}']\} - U(\vec{r}').$$

Используем тождество

$$\frac{d}{dt}m\vec{r}'\vec{v}_0 - m\vec{r}'\vec{a}_0 = m\vec{v}_0\{\vec{v}' + [\vec{\omega}\,\vec{r}']\},$$

для проверки которого следует учесть, что $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + [\vec{\omega}\,\vec{r}']$. Полная производная по времени не влияет на уравнение, поэтому в лагранжиане отбрасываем производную. Отбрасываем и слагаемое $\frac{1}{2}mv_0^2$, которое для переменных $\vec{r}'$ и $\vec{v}'$ является постоянной величиной. Окончательно

$$L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} + \frac{m}{2}[\vec{\omega}\,\vec{r}']^2 - m\vec{r}'\vec{a}_0 - U(\vec{r}') + m\vec{v}'[\vec{\omega}\,\vec{r}'].$$

Запишем для найденной функции Лагранжа уравнения Лагранжа, предполагая, что они справедливы в неинерциальной системе

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial\vec{v}'} - \frac{\partial L'}{\partial\vec{r}'} = 0$$

(векторная форма записи частных производных является сокращением записи трех уравнений в проекциях, например, декартовых, или $\frac{\partial L'}{\partial \vec{v}} = \operatorname{grad}_v L'$, $\frac{\partial L'}{\partial \vec{r}} = \operatorname{grad} L'$. Для нахождения производных функций L' удобно записать сначала ее (частные) дифференциалы по переменным $\vec{r}'$ и $\vec{v}'$:

$$d_v L' = m\vec{v}' d\vec{v}' + m d\vec{v}' [\vec{\omega}\, \vec{r}'],$$

$$d_r L' = m [\vec{\omega}\, \vec{r}'] [\vec{\omega} d\vec{r}'] + m\vec{v}' [\vec{\omega} d\vec{r}'] - m d\vec{r}' \vec{a}_0 - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} d\vec{r}'.$$

После этого находим само уравнение:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\vec{a}_0 - m [\vec{\omega} [\vec{\omega}\, \vec{r}']] - m [\dot{\vec{\omega}}\, \vec{r}'] - 2m [\vec{\omega}\, \vec{v}'].$$

Сравнивая найденное уравнение с изученным в § 7, заключаем, что, во-первых, уравнения Лагранжа *инвариантны* по отношению к переходам в неинерциальные системы, а во-вторых, *силы инерции принадлежат к обобщенно-потенциальным.*

§ 22. Законы сохранения и уравнения Лагранжа

22.1. Функция Гамильтона системы. Динамические уравнения механики, основанные на законах Ньютона, приводят к первым интегралам движения или к законам сохранения энергии, импульса, момента импульса системы материальных точек (глава IV). Также обстоит дело и с уравнениями Лагранжа, описывающими движение системы в обобщенных координатах: они приводят к сохранению некоторых величин, носящих название обобщенной энергии и обобщенных импульсов.

Рассмотрим систему, в которой обобщенные силы удовлетворяют условию (19.11) или (21.3), т. е. они потенциальные или обобщенно-потенциальные. Для получения первых интегралов движения умножим каждое из уравнений (21.2) на соответствующую обобщенную скорость и просуммируем результаты. Получаем:

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \dot{q}_k - \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0,$$

но так как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \dot{q}_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k,$$

то уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k\right] = 0.$$

Лагранжиан является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, т. е.

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t),$$

поэтому имеет место тождество

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k\right] + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Подставляя значение суммы из последнего равенства в преды-