(векторная форма записи частных производных является сокращением записи трех уравнений в проекциях, например, декартовых, или $\frac{\partial L'}{\partial \vec{v}} = \operatorname{grad}_v L'$, $\frac{\partial L'}{\partial \vec{r}} = \operatorname{grad} L'$. Для нахождения производных функций L' удобно записать сначала ее (частные) дифференциалы по переменным $\vec{r}'$ и $\vec{v}'$:

$$d_v L' = m\vec{v}' d\vec{v}' + m d\vec{v}' [\vec{\omega}\, \vec{r}'],$$

$$d_r L' = m [\vec{\omega}\, \vec{r}'] [\vec{\omega} d\vec{r}'] + m\vec{v}' [\vec{\omega} d\vec{r}'] - m d\vec{r}' \vec{a}_0 - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} d\vec{r}'.$$

После этого находим само уравнение:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\vec{a}_0 - m [\vec{\omega} [\vec{\omega}\, \vec{r}']] - m [\dot{\vec{\omega}}\, \vec{r}'] - 2m [\vec{\omega}\, \vec{v}'].$$

Сравнивая найденное уравнение с изученным в § 7, заключаем, что, во-первых, уравнения Лагранжа *инвариантны* по отношению к переходам в неинерциальные системы, а во-вторых, *силы инерции принадлежат к обобщенно-потенциальным.*

§ 22. Законы сохранения и уравнения Лагранжа

22.1. Функция Гамильтона системы. Динамические уравнения механики, основанные на законах Ньютона, приводят к первым интегралам движения или к законам сохранения энергии, импульса, момента импульса системы материальных точек (глава IV). Также обстоит дело и с уравнениями Лагранжа, описывающими движение системы в обобщенных координатах: они приводят к сохранению некоторых величин, носящих название обобщенной энергии и обобщенных импульсов.

Рассмотрим систему, в которой обобщенные силы удовлетворяют условию (19.11) или (21.3), т. е. они потенциальные или обобщенно-потенциальные. Для получения первых интегралов движения умножим каждое из уравнений (21.2) на соответствующую обобщенную скорость и просуммируем результаты. Получаем:

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \dot{q}_k - \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0,$$

но так как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \dot{q}_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k,$$

то уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k\right] = 0.$$

Лагранжиан является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, т. е.

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t),$$

поэтому имеет место тождество

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k\right] + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Подставляя значение суммы из последнего равенства в преды-

дущее уравнение, имеем:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - \frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \qquad (22.1)$$

Объединяя два первых члена, можно ввести функцию

$$H = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L, \qquad (22.2)$$

которая называется *обобщенной энергией системы* или *функцией Гамильтона системы (гамильтонианом)*. Гамильтониан системы содержит в себе информацию о системе, как и лагранжиан. В теоретической физике он используется для описания систем не только в классической механике, но и в других разделах; особенно широко — в квантовой механике.

22.2. Первые интегралы уравнений Лагранжа. Выполним вывод первых интегралов из уравнений Лагранжа. Введя функцию Гамильтона (22.2) в уравнение (22.1), получим теорему об изменении обобщенной энергии:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{dt}. \qquad (22.3)$$

Если функция Лагранжа L от времени явно не зависит, то обобщенная энергия системы сохраняется во времени, т. е.

$$H = \text{const}. \qquad (22.4)$$

Рассмотрим этот важнейший закон для потенциальных сил. Независимость функций Лагранжа от времени означает стационарность связей и стационарность сил, т. е.

$$L = T - U(q_k).$$

Поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

и функция Гамильтона может быть записана в виде

$$H = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L.$$

Так как T — однородная квадратичная функция обобщенных скоростей, то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = 2T,$$

откуда обобщенная энергия равна *механической энергии* системы:

$$H = 2T - T + U = T + U. \qquad (22.5)$$

При этом она сохраняется в потенциальном поле.

Рассмотрим структуру функции Гамильтона в общем случае, т. е. для нестационарных полей и связей, но для обобщенно-потенциальных сил. В обобщенный

лагранжиан (21.6) подставим значения T из формулы (20.12) и получим:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{kl}^{s} A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k}^{s} A_k\dot{q}_k + A_0 - \sum_{k}^{s} a_k\dot{q}_k - U_0 = T_2 + T_1 + T_0 - U_1 - U_0.$$

Выполним необходимые для нахождения гамильтониана по формуле (22.2) преобразования:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{l}^{s} A_{kl}\dot{q}_l + A_k - a_k,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = \sum_{l}^{s} (A_{kl}\dot{q}_l\dot{q}_k + A_k\dot{q}_k - a_k\dot{q}_k),$$

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = \sum_{kl}^{s} A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k}^{s} A_k\dot{q}_k - \sum_{k}^{s} a_k\dot{q}_k = 2T_2 + T_1 - U_1.$$

Наконец,

$$H = T_2 - T_0 + U_0. \tag{22.6}$$

Таково выражение обобщенной энергии системы при обобщенно-потенциальных силах и нестационарных связях. Энергия сохраняется, если стационарны силы и связи. В таком случае кинетическая энергия является однородной квадратичной функцией скоростей и выражение для гамильтониана упрощается:

$$H = T_2 + U_0 = \text{const}.$$

Таков один из первых интегралов уравнений Лагранжа, или интеграл обобщенной энергии.

Полная механическая энергия для системы в общем случае может быть определена как сумма кинетической и потенциальной энергий (в обобщенных координатах), т. е.

$$E = T_2 + T_1 + T_0 + U_1 + U_0.$$

Она *не сохраняется* не только при нестационарных силах и связях, но и при стационарных связях и стационарных обобщенно-потенциальных силах. В последнем случае введенная полная энергия выражается формулой $E = T_2 + U_1 + U_0$ и не сохраняется за счет несохранения U_1.

Поэтому данная величина может совсем не рассматриваться, а вместо нее (в случаях сохранения) *называют полной механической энергией обобщенную энергию системы* H.

Кроме интегралов обобщенной механической энергии из уравнений Лагранжа вытекают интегралы *обобщенных импульсов*. Снова рассмотрим уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

Величину

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k \tag{22.7}$$

называют обобщенным импульсом, соответствующим обобщенной координате q_k. Уравнения Лагранжа через обобщенные импульсы записываются в виде

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, s). \tag{22.8}$$

Лагранжиан может не зависеть от одной или нескольких обоб-

щенных координат, которые называют *циклическими*. С каждой такой координатой связан первый интеграл движения, называемый циклическим. Пусть координата q_c циклическая. Уравнение Лагранжа принимает вид:

$$\dot{p}_c = \frac{\partial L}{\partial q_c} = 0.$$

Отсюда следует циклический интеграл:

$$p_c = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} = \text{const}.$$

Механический смысл циклического интеграла может быть различным в зависимости от смысла соответствующей обобщенной координаты. В частных случаях это могут быть законы сохранения *составляющей импульса*, когда обобщенная координата имеет размерность длины, или *момента импульса* для угловой обобщенной координаты.

При обобщенно-потенциальных силах обобщенные импульсы отличаются от обычных и в декартовых координатах. В самом деле, если

$$L = T - U(q, \dot{q}),$$

то

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}, \tag{22.9}$$

где имеется дополнительное слагаемое $-\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}$ к обычному импульсу свободной точки:

$$\vec{p} = m\vec{v} - \text{grad}_{\vec{v}} U. \tag{22.10}$$

Это значит, что в поле обобщенно-потенциальных сил может сохраняться та или иная составляющая не обычного, а обобщенного импульса при условии, что соответствующая проекция силы равна нулю (см. пример 22.3).

Пример 22.1. **Расчет гамильтониана, или обобщенной энергии свободной заряженной точки в электромагнитном поле.**

Пользуясь обобщенным потенциалом для данного случая (см. пример 21.5), имеем функцию Лагранжа:

$$L = \frac{mv^2}{2} - q\varphi + q\vec{A}\,\vec{v}.$$

Рассчитываем H по формуле (22.2):

$$H = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\vec{v} - L = mv^2 + q\vec{A}\,\vec{v} - \frac{mv^2}{2} + q\varphi - q\vec{A}\,\vec{v} = \frac{mv^2}{2} + q\varphi,$$

что можно истолковать как полную механическую энергию заряженной точки в поле. Часть обобщенного потенциала $U_0 = q\varphi$ можно рассматривать как обычную потенциальную энергию точки в силовом поле.

Пример 22.2. **Расчет гамильтониана, или обобщенной энергии свободной (изолированной) материальной точки в релятивистском случае.**

Лагранжиан выражается формулой

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где c — постоянная, равная скорости света в вакууме.

Произведем расчет H:

$$H = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Это выражение называют полной релятивистской энергией материальной точки.

Пример 22.3. **Расчет обобщенного импульса точки в электромагнитном поле.**

С помощью функции Лагранжа (см. пример 22.1) вычисляем обобщенный импульс заряженной материальной точки в электромагнитном поле: $\vec{p}_{об} = m\vec{v} + q\vec{A}$.

Пусть имеет место однородное постоянное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Воспользуемся цилиндрическими координатами и направим ось Oz по вектору индукции магнитного поля. Из рисунка 22.1 видно, что составляющие силы Лоренца (см. пример 21.5), действующие на заряд q, таковы:

$$F_\varphi = -qB\dot{\rho},\quad F_\rho = qB\rho\dot{\varphi},$$

а обобщенные силы (см. пример 20.5):

$$Q_\varphi = -qB\rho\dot{\rho},\quad Q_\rho = qB\rho\dot{\varphi}.$$

Нетрудно, пользуясь формулой обобщенно-потенциальной силы (21.3), подобрать обобщенный потенциал:

$$U = \frac{1}{2}qB\rho^2\dot{\varphi},$$

приводящий к этим силам. Следовательно, функция Лагранжа в цилиндрических координатах имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}qB\rho^2\dot{\varphi}.$$

Циклическими являются координаты z и φ, т. е. сохраняются обобщенные импульсы:

$$p_z = m\dot{z},\quad p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} - \frac{1}{2}qB\rho^2.$$

Пример 22.4. **Интегрирование уравнений сферического маятника.**

В примере (21.3) получено выражение для функции Лагранжа, т. е.

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - mgl\cos\vartheta.$$

Так как лагранжиан явно от времени не зависит, то существует первый интеграл обобщенной энергии:

$$H = \frac{ml^2}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) + mgl\cos\vartheta. \qquad (а)$$

Координата φ является циклической, и ей соответствует первый интеграл обобщенного импульса:

$$ml^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi} = M. \qquad (б)$$

Это интеграл момента импульса относительно оси Oz. Выражая $\dot{\varphi}$ из (б) и под-

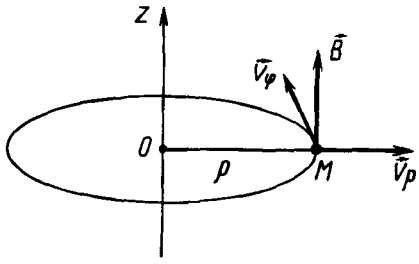

Рис. 22.1.

ставляя в (a), имеем:

$$\frac{ml^2}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{M^2}{2\,ml^2\sin^2\vartheta} + mgl\cos\vartheta = H,$$

откуда можно найти $\dot{\vartheta}$:

$$\dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}\left(H - \frac{M^2}{2\,ml^2\sin^2\vartheta} - mgl\cos\vartheta\right)} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}(H - U_e)}.$$

Разделяя переменные, получаем кинематическое уравнение движения для ϑ путем взятия интеграла:

$$t = \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}(H - U_e)}} + C_1.$$

Определяя отсюда dt и подставляя в (б), имеем уравнение с разделенными переменными. После интегрирования получаем зависимость между φ и ϑ:

$$\varphi = \int \frac{M}{ml^2\sin^2\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}(H - U_e)}} + C_2.$$

Это уравнение траектории движения материальной точки по сфере. Если подставить сюда найденную функцию $\vartheta = \vartheta(t)$, то получим второе кинематическое уравнение движения: $\varphi = \varphi(t)$.

Легко найти силу реакции сферы при движении по ней материальной точки. Общее уравнение механики приводит к равенству

$$mg\cos\vartheta + R_r - ma_r = 0,$$

откуда

$$R_r = ma_r - mg\cos\vartheta.$$

Используя выражение для a_r из примера 20.6, получаем:

$$R_r = -\frac{2}{l}H + mg\cos\vartheta$$

— такова реакция сферы.

Пример 22.5. **Вывод закона сохранения энергии в неинерциальной системе отсчета.**

Выберем в некоторой неинерциальной системе в качестве обобщенных декартовы координаты x', y', z' и воспользуемся функцией Лагранжа из примера 21.6, имеющей вид:

$$L' = \frac{mv'^2}{2} + \frac{m}{2}[\vec{\omega}\vec{r}']^2 - m\vec{r}'\vec{a}_0 - U(\vec{r}') + m\vec{v}'[\vec{\omega}\vec{r}'].$$

Здесь при движении неинерциальной системы величины $\vec{\omega}$ и $\vec{a}_0$ являются явными функциями времени, поэтому интеграла обобщенной энергии нет. Все три координаты обязательно входят в лагранжиан, если система вращается (члены второй и последний), поэтому нет и циклических интегралов момента импульса. Если бы система не вращалась, циклические интегралы импульса существовали бы при отсутствии третьего слагаемого, но тогда система была бы инерциальной.

Из формулы для лагранжиана видно, что если система отсчета движется с постоянным ускорением и вращается с постоянной скоростью, то существует только интеграл обобщенной энергии:

$$H = \frac{mv'^2}{2} + U(\vec{r}') - \frac{m}{2}[\vec{\omega}\vec{r}']^2 + m\vec{r}'\vec{a}_0.$$

Этот вывод получается сразу, если учесть, что выбранные координаты нормальные

(т. е. кинетическая энергия есть $\frac{mv'^2}{2}$), а обобщенный потенциал U_1 выражен последним слагаемым. Дополнительные к механической энергии слагаемые — третье и четвертое — играют роль потенциальной энергии в поле сил инерции.

Пример 22.6. **Ларморова прецессия.**

Рассмотрим движение заряженной материальной точки в поле притяжения центральной силы при условии, что имеется слабое однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ (например, электрон движется в поле кулоновского притяжения к ядру, а атом находится в магнитном поле). Функцию Гамильтона в цилиндрических координатах для этого случая можно записать, пользуясь примером 22.3:

$$H = \frac{mv^2}{2} + U(r) + \frac{eB}{2}\rho^2\dot{\varphi}.$$

Рассмотрим теперь движение в неинерциальной системе, вращающейся вокруг оси Oz с угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega$, без магнитного поля.

Чтобы записать функцию Гамильтона в этой системе, разложим выражение кинетической энергии в инерциальной системе на кинетическую энергию относительного движения и энергию вращательного движения:

$$\frac{mv^2}{2} \approx \frac{mv'^2}{2} + \frac{m}{2}\rho^2\omega^2.$$

Функция Гамильтона во вращающейся системе найдена в примере 22.5:

$$H' = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}\rho^2\omega^2 + U(r) - \frac{m}{2}\rho^2\omega^2.$$

Теперь можно свести действие магнитного поля на электрон к движению неинерциальной системы. Приравнивая H и H', видим, что

$$\omega = \frac{|e|B}{2m}.$$

Таким образом, в магнитном поле электрон движется так же, как в неинерциальной системе, вращающейся вокруг направления поля с угловой скоростью ω, что равносильно прецессии орбиты электрона вокруг направления поля с ларморовой частотой ω.

22.3*. Законы сохранения и симметрии пространства-времени. Существует определенная связь между законами сохранения энергии, импульса, момента импульса и симметриями пространства-времени: однородностью, изотропностью. В механике эта связь наиболее полно может быть выяснена с помощью уравнений Лагранжа.

Однородность времени и сохранение энергии

Возьмем замкнутую свободную систему материальных точек, для которой в силу однородности времени функция Лагранжа явно от времени не зависит, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Но это и есть, как было показано ранее (в § 22), условие сохранения обобщенной энергии H для системы. Для потенциальных и обобщенно-потенциальных сил (а такие силы только и могут иметь место для свободной системы материальных точек в пустоте) обобщенная энергия совпадает с полной механической энергией. Таким образом, закон сохранения полной механической энергии замкнутой свободной

системы оказывается следствием уравнений Лагранжа и однородности времени.

Однородность пространства и сохранение импульса

Произведем сдвиг системы в пространстве как единого целого, т. е. выполним трансляцию или параллельный перенос на $\delta\vec{r}$. Все точки испытывают смещение на один и тот же бесконечно малый отрезок, так что

$$\vec{r}_i \to \vec{r}_i' = \vec{r}_i + \delta\vec{r}. \tag{22.11}$$

Мы рассматриваем свободную от связей систему, поэтому в качестве обобщенных координат выбираем декартовы координаты точек. Все точки системы испытывают один и тот же сдвиг: δx, δy, δz.

Найдем соответствующее этому сдвигу бесконечно малое изменение функции Лагранжа системы. Это можно сделать, варьируя лагранжиан по координатам:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x + \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i}\delta y + \sum_i \frac{\partial L}{\partial z_i}\delta z.$$

В силу однородности пространства параллельный перенос замкнутой системы в нем не приводит к каким-либо физическим изменениям в системе. Это значит, что лагранжиан системы при переносе не изменяется, т. е. $\delta L = 0$. Отсюда следуют равенства:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\ \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0,\ \sum_i \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0.$$

Суммируя по всем точкам системы уравнения (22.8), выражающие закон изменения обобщенного импульса, с помощью последних равенств приходим к новым равенствам:

$$\frac{d}{dt}\sum_i p_{ix} = 0,\ \frac{d}{dt}\sum_i p_{iy} = 0,\ \frac{d}{dt}\sum_i p_{iz} = 0.$$

Отсюда и следует закон сохранения обобщенного импульса замкнутой системы:

$$\sum_i p_{ix} = \text{const},\ \sum_i p_{iy} = 0,\ \sum_i p_{iz} = \text{const}.$$

Для потенциальных сил обобщенные импульсы свободной системы в декартовых координатах совпадают с обычными импульсами $m_i\vec{v}_i$, в чем нетрудно убедиться, используя определение обобщенного импульса (22.7) и функцию Лагранжа:

$$L = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i \neq k} U_{ik}(r_{ik}).$$

Из (22.7) следует, что $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$.

Если в замкнутой системе действуют обобщенно-потенциальные силы, то обобщенный потенциал для каждой пары точек может зависеть только от модуля их относительной скорости, т. е. $U = U(v_{12})$

В этом случае дополнительные слагаемые к обычному импульсу (см формулу (22 10)) системы двух точек в обобщенном импульсе дадут нуль, так как $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = v_{12}$ и

$$\frac{\partial U(v_{1,2})}{\partial \vec{v}_1} = -\frac{\partial U(v_{12})}{\partial \vec{v}_2}.$$

В конечном счете обобщенный импульс свободной системы оказывается обычным и для замкнутой системы всегда сохраняется.

Изотропность пространства и сохранение момента импульса

Произведем поворот замкнутой свободной системы материальных точек в пространстве вокруг некоторой оси OO' на бесконечно малый угол $\delta\vec{\varphi}$. Как видно из рисунка 2.6, смещение точек определяется вектором $\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi}\vec{r}]$. Аналогично изменяются и векторы скоростей, т. е. $\delta\vec{v} = [\delta\vec{\varphi}\vec{v}]$. Итак, при повороте системы происходят преобразования координат и скорости:

$$\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r} + [\delta\vec{\varphi}\vec{r}], \quad \vec{v} \to \vec{v}' = \vec{v} + [\delta\vec{\varphi}\vec{v}].$$

Найдем изменение функции Лагранжа, обусловленное поворотом (в качестве обобщенных координат взяты декартовы координаты точек):

$$\delta L = \sum_i (\mathrm{grad}_{\vec{r}_i} L \delta\vec{r}_i + \mathrm{grad}_{\vec{v}_i} L \delta\vec{v}_i).$$

$$\left(\text{Здесь } \mathrm{grad}_{\vec{v}_i} L = \vec{i}\frac{\partial L}{\partial v_{ix}} + \vec{j}\frac{\partial L}{\partial v_{iy}} + \vec{k}\frac{\partial L}{\partial v_{iz}}.\right)$$

Найденное изменение в силу изотропности пространства равно нулю. Учитывая значения $\delta\vec{r}_i$ и $\delta\vec{v}_i$, имеем:

$$\sum_i \mathrm{grad}_{\vec{r}_i} L [\delta\vec{\varphi}\vec{r}_i] + \sum_i \mathrm{grad}_{\vec{v}_i} L [\delta\vec{\varphi}\vec{v}_i] = 0.$$

Произведя циклическую перестановку сомножителей в смешанных произведениях, получим:

$$\delta\vec{\varphi}\sum_i \{[\vec{r}_i \mathrm{grad}_{\vec{r}} L] + [\vec{v}_i \mathrm{grad}_{\vec{v}_i} L]\} = 0.$$

Но на основании (22.8)

$$\mathrm{grad}_{\vec{v}} L = \vec{p}_i,$$

а с помощью уравнений Лагранжа

$$\mathrm{grad}_{\vec{r}} L = \frac{d}{dt}\vec{p}_i.$$

Так что

$$\delta\vec{\varphi}\sum_i \{[\vec{r}_i\dot{\vec{p}}_i] + [\vec{v}_i\vec{p}_i]\} = \delta\vec{\varphi}\sum_i \frac{d}{dt}[\vec{r}_i\vec{p}_i] = 0.$$

Откуда и следует:

$$\sum_i [\vec{r}_i \vec{p}_i] = \text{const}.$$

Величина

$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i \vec{p}_i]$$

является моментом импульса системы. Она сохраняется с течением времени для замкнутой системы. Итак, показано, что в рамках уравнений Лагранжа законы сохранения вытекают как следствия из этих уравнений и свойств пространства и времени, называемых симметриями пространства-времени.

§ 23. Канонические уравнения Гамильтона

В предыдущем параграфе рассмотрены уравнения движения системы; чтобы их составить для конкретной задачи, необходимо знать функцию Лагранжа L. Метод получения и анализа уравнений движения, основанный на функции Лагранжа, охватывает не только механические системы, но и квантово-механические системы и электромагнитное поле. Такой метод носит название *формализма Лагранжа*.

Кроме этого метода, существует и другой метод составления дифференциальных уравнений движения для механических и других систем, основанный на функции Гамильтона (22.2), или обобщенной энергии. Этот метод называют *гамильтоновым формализмом*.

23.1. Вывод уравнений Гамильтона из уравнений Лагранжа. Каждое уравнение Лагранжа есть дифференциальное уравнение второго порядка, а число уравнений равно s — числу степеней свободы механической системы. Считается, что система дифференциальных уравнений имеет нормальный вид, если все уравнения, входящие в нее, первого порядка. Заданную систему дифференциальных уравнений второго порядка можно привести к нормальному виду множеством способов.

Ирландский математик Гамильтон указал способ приведения дифференциальных уравнений Лагранжа к нормальному виду, дающий симметричные, т. е. одинаковые по форме уравнения относительно разных переменных, входящих в них. Эти дифференциальные уравнения получили название *канонических дифференциальных уравнений* движения. Они называются также *уравнениями Гамильтона*.

Рассмотрим один из способов получения канонических уравнений, причем выведем их для системы с голономными идеальными связями и обобщенно-потенциальными силами.

Перейдем от совокупности обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$ независимых переменных, задающих положение всех точек системы, к новой совокупности независимых переменных, в которой к s координатам q_k прибавлено s обобщенных импульсов: $p_k = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$. Совокуп-