Откуда и следует:

$$\sum_i [\vec{r}_i \vec{p}_i] = \text{const}.$$

Величина

$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i \vec{p}_i]$$

является моментом импульса системы. Она сохраняется с течением времени для замкнутой системы. Итак, показано, что в рамках уравнений Лагранжа законы сохранения вытекают как следствия из этих уравнений и свойств пространства и времени, называемых симметриями пространства-времени.

§ 23. Канонические уравнения Гамильтона

В предыдущем параграфе рассмотрены уравнения движения системы; чтобы их составить для конкретной задачи, необходимо знать функцию Лагранжа L. Метод получения и анализа уравнений движения, основанный на функции Лагранжа, охватывает не только механические системы, но и квантово-механические системы и электромагнитное поле. Такой метод носит название *формализма Лагранжа*.

Кроме этого метода, существует и другой метод составления дифференциальных уравнений движения для механических и других систем, основанный на функции Гамильтона (22.2), или обобщенной энергии. Этот метод называют *гамильтоновым формализмом*.

23.1. Вывод уравнений Гамильтона из уравнений Лагранжа. Каждое уравнение Лагранжа есть дифференциальное уравнение второго порядка, а число уравнений равно s — числу степеней свободы механической системы. Считается, что система дифференциальных уравнений имеет нормальный вид, если все уравнения, входящие в нее, первого порядка. Заданную систему дифференциальных уравнений второго порядка можно привести к нормальному виду множеством способов.

Ирландский математик Гамильтон указал способ приведения дифференциальных уравнений Лагранжа к нормальному виду, дающий симметричные, т. е. одинаковые по форме уравнения относительно разных переменных, входящих в них. Эти дифференциальные уравнения получили название *канонических дифференциальных уравнений* движения. Они называются также *уравнениями Гамильтона*.

Рассмотрим один из способов получения канонических уравнений, причем выведем их для системы с голономными идеальными связями и обобщенно-потенциальными силами.

Перейдем от совокупности обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$ независимых переменных, задающих положение всех точек системы, к новой совокупности независимых переменных, в которой к s координатам q_k прибавлено s обобщенных импульсов: $p_k = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$. Совокуп-

ность $2s$ канонических переменных — обобщенных координат q_k и обобщенных импульсов p_k — в любой момент времени однозначно определяет механическое состояние системы материальных точек.

Если в методе Лагранжа для составления дифференциальных уравнений движения должна быть известна функция Лагранжа, то теперь исходной служит функция Гамильтона:

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t), \tag{23.1}$$

которая должна быть выражена через канонические переменные. Последнее всегда возможно, так как $\dot{q}_k$ является однозначной функцией p_k и q_k.

Обобщенный импульс в общем случае будет выражаться формулой

$$p_l = \sum_k A_{kl}\dot{q}_k + A_l - a_l.$$

Эта система разрешима относительно $\dot{q}_k$, так как определитель

$$|A_{kl}| \neq 0.$$

Итак, пусть $H = H(p_k, q_k)$.

Запишем теперь функцию Лагранжа системы с помощью формулы (23.1) через функцию Гамильтона, которую считаем заданной:

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - H(p_k, q_k, t). \tag{23.2}$$

Используя (23.2) для составления уравнений Лагранжа (21.2), получим одно уравнение Гамильтона, а дифференцируя равенство (23.2) по p_k частным образом,— другое уравнение Гамильтона:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k};$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, s). \tag{23.3}$$

Эти уравнения описывают движение системы под действием потенциальных и обобщенно-потенциальных сил. Если есть диссипативные силы, то первое уравнение видоизменяется; в соответствии с формулой (21.7) справа прибавляется обобщенная сила:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + Q_k. \tag{23.4}$$

Из системы уравнений (23.3) видно, что уравнения Гамильтона имеют симметричный вид относительно канонических переменных p_k и q_k, благодаря чему они находят широкое применение в теории, в частности в статистической физике. Вспомним, что в лагранжевом формализме состояние системы из n материальных точек описывают положением одной изображающей точки в пространстве конфигураций, образованном обобщенными координатами q_k (§ 19). Аналогично в гамильтоновом формализме состояние системы описывают положением изображающей точки в *фазовом* пространстве, образованном обобщенными координатами q_k и обобщенными импульсами p_k. Конфигурационное пространство имеет s, а фазовое $2s$ измерений.

Пример 23.1. **Составление уравнений Гамильтона.**

Найдем общий вид уравнений Гамильтона для свободной материальной точки массой m, движущейся в потенциальном поле. Гамильтониан в декартовых координатах имеет вид:

$$H = T_2 + U_0 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U_0(x, y, z, t).$$

Обобщенные импульсы выражаются формулами

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \; p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \; p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

следовательно, гамильтониан запишется через обобщенные импульсы так:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U_0(x, y, z, t).$$

Уравнения Гамильтона нетрудно получить с помощью формул (23.3):

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}, \; \dot{p}_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}, \; \dot{p}_z = \dfrac{\partial U}{\partial z}, \\ \dot{x} = \dfrac{p_x}{m}, \; \dot{y} = \dfrac{p_y}{m}, \; \dot{z} = \dfrac{p_z}{m}. \end{cases}$$

Пример 23.2. **Функция Гамильтона для заряженной материальной точки в электромагнитном поле в обобщенных импульсах.**

Обобщенный импульс для заряженной точки рассчитан в примере 22.3 и выражается формулой

$$\vec{p}_{об} = m\vec{v} + q\vec{A},$$

а обобщенная энергия (см. пример 22.1) — формулой

$$H = \frac{mv^2}{2} + q\varphi.$$

Гамильтониан следует выразить через обобщенный импульс:

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p}_{об} - q\vec{A})^2 + q\varphi.$$

Функция Гамильтона составлена.

Пример 23.3. **Составление уравнений движения заряженной точки в электромагнитном поле.**

Уравнения Гамильтона (23.3) составим для найденной в предыдущем примере функции H:

$$m\dot{v}_x + q\dot{A}_x = \frac{1}{m}(\vec{p}_{об} - q\vec{A})\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - q\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$m\dot{v}_y + q\dot{A}_y = \frac{1}{m}(\vec{p}_{об} - q\vec{A})\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} - q\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$m\dot{v}_z + q\dot{A}_z = \frac{1}{m}(\vec{p}_{об} - q\vec{A})\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} - q\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}(\vec{p}_{об} - q\vec{A}).$$

23.2. Интегралы уравнений Гамильтона. Из уравнений Гамильтона можно получить интегралы, аналогичные вытекающим из уравнений Лагранжа (§ 22), т. е. интеграл обобщенной, или *полной механической энергии*, и циклические интегралы обобщенных импульсов. Так как частные производные по времени от функции Лагранжа и Гамильтона совпадают, как это видно из формулы (23.2), то условием сохранения обобщенной энергии является независимость

H от времени *явно*. Формула $H = \text{const}$ выражает первый интеграл движения или интеграл энергии.

Из формулы (23.2) видно, что совпадают и частные производные по координатам от обеих функций:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

А это значит, что уравнения Лагранжа и Гамильтона имеют общие циклические интегралы.

При наличии циклических координат имеют место отдельные равенства

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$$

и соответственно циклические интегралы $\dot{p}_k = 0$, $p_k = \text{const}$, являющиеся интегралами обобщенных импульсов.

Может случиться, что все координаты циклические. Тогда все обобщенные импульсы постоянны; постоянен во времени и гамильтониан. Отсюда

$$\dot{q}_k = \text{const},$$

а кинематические уравнения движения имеют вид: $q_k = C_1 t + C_2$. Задача о движении решается при интегрировании половины уравнений от всех уравнений движения.

Пример 23.4. **Движение материальной точки под действием силы тяжести.** Составим гамильтониан:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz.$$

Видим, что координаты x и y являются циклическими. Следовательно,

$$\dot{x} = \text{const}, \ \dot{y} = \text{const}, \ \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -mg.$$

Общее решение задачи получается сразу:

$$x = C_1 t + C_2, \ y = C_3 t + C_4, \ z = -\frac{gt^2}{2} + C_5 t + C_6.$$

Эта задача решена с помощью ньютоновых дифференциальных уравнений в § 6. Сейчас можно видеть, что в гамильтоновом формализме не потребовалось ни понятия силы, ни проецирования векторных уравнений на оси.

23.3*. Скобки Пуассона. Пусть движение системы описывается уравнениями Гамильтона:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \ \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

а $f(p_k, q_k, t)$ есть одна из функций механического состояния системы, например энергия, импульс и т. д.

Возьмем полную производную по времени от этой функции:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Преобразуем $\frac{df}{dt}$, пользуясь уравнениями Гамильтона:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Сумма в предыдущей формуле обозначается через $[f, H]$:

$$[f, H] = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right). \tag{23.5}$$

Она является дифференциальным оператором, который называется *скобками Пуассона*. В новых обозначениях для полной производной функции f имеем формулу

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{23.6}$$

Если $\frac{df}{dt} = 0$, функция $f(p_k, q_k, t)$ является интегралом движения. В таком случае

$$[f, H] = -\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{23.7}$$

Если же интеграл не зависит от времени явно, то скобка Пуассона равна нулю:

$$[f, H] = 0. \tag{23.8}$$

Скобки Пуассона можно составить и для двух функций состояния f_1 и f_2, т. е.

$$[f_1, f_2] = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_k} \frac{\partial f_2}{\partial p_k} - \frac{\partial f_1}{\partial p_k} \frac{\partial f_2}{\partial q_k} \right). \tag{23.9}$$

Из последней формулы видно, что скобки Пуассона антикоммутативны: $[f_1, f_2] = -[f_2, f_1]$.

И только для одинаковых функций коммутативны: $[f_1, f_2] = 0$; говорят, что скобки Пуассона обладают свойством антисимметрии.

Скобки Пуассона, взятые для самих канонических переменных (т. е. $f_1 = q_k$, $f_2 = p_k$), называются *фундаментальными* скобками Пуассона. Они таковы:

$$\begin{cases} [q_k, q_j] = 0, \quad [p_k, p_j] = 0, \\ [q_k, p_j] = \delta_{kj}, \ \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j. \end{cases} \end{cases} \tag{23.10}$$

С помощью скобок Пуассона описываются инвариантные свойства системы, т. е. не зависящие от выбора канонических переменных.

Фундаментальные скобки Пуассона имеют квантово-механический аналог — перестановочные соотношения Гейзенберга, играющие важную роль в квантовой механике. В аппарате этой науки формализм Гамильтона играет существенную роль.