§ 24. Принцип экстремального действия

24.1. Действие. Принцип Гамильтона. Уравнения Лагранжа были получены ранее из уравнений Ньютона для системы связанных материальных точек с помощью принципа виртуальных перемещений и принципа Даламбера — Лагранжа. Однако уравнения Лагранжа можно получить из общего теоретического принципа, носящего название вариационного принципа *экстремального* (иногда *стационарного) действия.* (Он же называется принципом Остроградского — Гамильтона.) Принцип экстремального действия распространяется не только на механические, но и на квантово-механические системы, поля, поэтому он имеет важнейшее теоретическое значение.

Принцип экстремального действия может быть применен к сложным механическим системам со связями. Однако уравнения для таких систем уже получены из общего уравнения механики. Особенно важно, что принцип экстремального действия применим для свободных систем в фундаментальных силовых полях, а также для самих полей как *систем с бесконечным числом степеней свободы.* По этой причине принцип позволяет получать фундаментальные уравнения физики как в механике, так и за ее пределами.

Мы применим принцип экстремального действия для нахождения уравнений движения свободной точки в потенциальном и обобщенно-потенциальном поле.

Если поведение системы описывается обобщенными координатами q_k (и некоторыми параметрами, такими, как масса, заряд) и известна функция Лагранжа $L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$, то можно составить *интеграл действия:*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t)\,dt. \tag{24.1}$$

Эта величина имеет размерность «энергия·время».

Заметим, что в предыдущих параграфах описывалось нахождение функции Лагранжа в процессе перехода от декартовых координат к обобщенным с помощью уравнений связи, понятий обобщенной силы, кинетической энергии и потенциальной. Сейчас предполагаем, что функция Лагранжа *задана.*

Для определения состояния системы с s степенями свободы выбрано s обобщенных координат. Введя конфигурационное пространство s измерений, можно рассматривать обобщенные координаты q_k как координаты точки s-мерного пространства. При движении система заменяется одной изображающей точкой, движущейся в конфигурационном пространстве. Эта точка в пространстве конфигураций описывает кривую, которую условно можно назвать траекторией движения системы.

Пусть имеем два состояния системы: в момент времени t_1 состояние системы определяется точкой A пространства конфигураций, а в момент t_2 — точкой B (рис. 24.1). Принцип стационарного действия состоит в утверждении: *из всех движений, переводящих систему из состояния A в момент времени t_1 в состояние B*

в момент времени t_2, в действительности осуществляется то, для которого обращается в нуль вариация интеграла действия:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \tag{24.2}$$

Обращение в нуль вариации действия есть необходимое условие его экстремума. Этим обстоятельством и объясняется название принципа.

24.2. Вывод уравнений Лагранжа из принципа экстремального действия. В математике интеграл (24.1) принадлежит к так называемым *функционалам,* если рассматривается зависимость его величины от вида подынтегральной функции. Задача об экстремуме функционала — отыскание функции, при которой наступает экстремум,— решается методами вариационного исчисления. В результате решения находятся дифференциальные уравнения, выполняющиеся для подынтегральной функции L; а поскольку в нашей постановке вопроса лагранжиан есть известная функция переменных q, $\dot{q}$ и t, то получаются дифференциальные уравнения для обобщенных координат, т. е. *уравнения движения.*

Рассмотрим сначала одномерную задачу и найдем условия экстремума действия:

$$\delta S = \delta \int_{t}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0.$$

Проварьируем интеграл:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_1 \dot{q}, t) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \{L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)\} dt.$$

Осталось найти вариацию подынтегральной функции L. Этот вопрос рассматривался в § 19, откуда с помощью формулы (19.2) имеем: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0.$

Изменяя последовательность дифференцирования и варьирования (что можно делать, так как время не варьируется), получаем: $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$. Подставим это значение в предыдущую формулу:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q dt;$$

здесь второй интеграл берется по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q dt.$$

Первое слагаемое результата обращается в нуль, так как по определению отыскивается такая функция $q = q(t)$, которая проходит через точки (*1*) и (*2*) на рисунке 24.2, т. е. $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Итак,

$$\int_{t_1}^{t} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \tag{24.3}$$

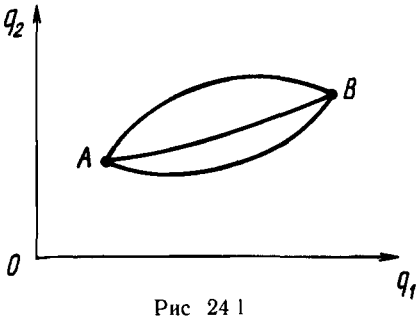

Рис 24 1

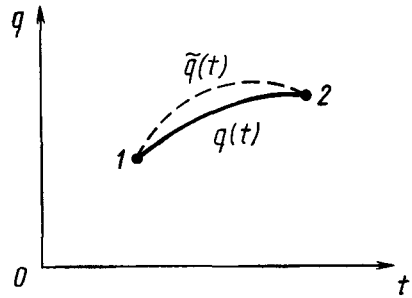

Рис 24 2

Равенство должно выполняться при произвольных (отличных от нуля) значениях δq, и поэтому имеет место необходимое и достаточное условие экстремума действия в виде уравнения, выполняющегося для подынтегральной функции L в интеграле действия:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \qquad (24.4)$$

Но это и есть уравнение Лагранжа для потенциальных и обобщенно-потенциальных сил.

Если функция Лагранжа зависит от s обобщенных координат q_k и скоростей $\dot{q}_k$, то при варьировании функции L получим s соответствующих слагаемых по формуле (24.3), отличающихся индексом k. В силу независимости вариаций δq_k получится *система уравнений Лагранжа:*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \; k = 1, 2, 3, \ldots, s. \qquad (24.5)$$

Особенность принципа экстремального действия состоит в простой связи его с преобразованиями от одной системы отсчета к другой. Об инвариантности уравнений Лагранжа по отношению к преобразованиям координат уже говорилось в § 21. Сейчас рассмотрим вопрос с иной точки зрения. Если действие является *инвариантом* некоторых преобразований, то получаемые из соответствующей функции L уравнения движения (24.5) будут *инвариантны* по отношению к этим преобразованиям. По этой причине составление лагранжианов широко применяется для получения инвариантных уравнений.

Пример 24 1 **Составление инвариантного по отношению к преобразованиям Галилея интеграла действия для изолированной материальной точки.**

Так как точка характеризуется в данном случае единственным параметром — массой, то этот скаляр должен входить в лагранжиан Механическое состояние точки описывается ее координатами x, y, z и скоростями $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ Но координаты в силу однородности пространства не могут входить в лагранжиан изолированной точки, скорость же благодаря изотропности пространства может войти через скаляр, т е в виде $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

При преобразованиях Галилея (см § 3) скорость преобразуется по формуле

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0,$$

откуда

$$v'^2 = v^2 + v_0^2 - 2\vec{v}\,\vec{v}_0.$$

Функции Лагранжа L и L' отличаются слагаемым вида

$$\vec{v}\,\vec{v}_0 = \frac{d}{dt}\vec{r}\,\vec{v}_0,$$

несущественным для уравнений Лагранжа (см. § 21). Если же модуль скорости включить в лагранжиан в степени выше второй, то лишние слагаемые, возникающие при возведении в куб и т. д., к полной производной по времени не сводятся и такие лагранжианы неинвариантны.

Не может зависеть лагранжиан и от времени, так как точка изолирована, а время однородно. Итак,

$$L \sim m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Коэффициент пропорциональности выберем $\frac{1}{2}$, т. е.

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Интеграл (24.1) с данной функцией Лагранжа будет инвариантом, так как время — инвариант преобразований Галилея.

Пример 24.2. **Составление инвариантной функции Лагранжа для свободной точки в силовом поле.**

В данном случае точки поля не обладают свойством однородности, как и моменты времени при переменном поле, т. е. в лагранжиан может входить функция координат и времени. Принцип относительности требует инвариантности лагранжиана, т. е. координаты должны входить в него через расстояния от центра (или расстояния до других точек):

$$U = U(r)$$

или

$$U = \sum_i U_i|\vec{r}_i - \vec{r}| = U(\vec{r}, t).$$

Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} mv^2 - U(\vec{r}, t).$$

Она приводит к известным уравнениям Ньютона, рассмотренным выше.

Пример 24.3. **Функция Лагранжа для обобщенно-потенциальных сил.**

По рассмотренной выше причине скорость в обобщенный потенциал может входить только линейно (в квадрате скорость входит в кинетическую энергию). Поэтому

$$L = \frac{1}{2} mv^2 - U(\vec{r}, t) + \vec{A}(\vec{r}, t)\vec{v},$$

где $\vec{A}(\vec{r}, t)$ — векторный потенциал поля. Функция такого вида использовалась в примере 21.5.

24.3. Различные схемы построения классической механики.

При построении курса механики в основу были положены законы Ньютона, являющиеся результатом широкого обобщения опытных фактов. Законы Ньютона с логической стороны являются *аксиомами,* из которых выводится все содержание механики. Построение механики, однако, возможно и при других исходных *положениях и принципах.* Такие принципы могут различаться по своей общности и по математической форме, хотя и связаны между собой.

Они приводят к различным схемам построения механики, каждая из которых содержит некоторую новую точку зрения на описание механического движения. Это обстоятельство имеет большую эвристическую ценность: особенности механического движения, оставшиеся скрытыми при одних исходных принципах, выступают явно

при использовании других. Существенным оказывается и привлечение различных математических методов для решения сложных задач механики.

По своей математической форме принципы выражаются *дифференциальными* или *интегральными* соотношениями. Дифференциальными называют такие законы, формулы которых связывают значения величин, относящихся к одному и тому же моменту времени или к одной и той же точке пространства. А формулы интегральных законов устанавливают связь между величинами, относящимися к конечному промежутку времени или конечной области пространства. Например, второй закон Ньютона есть дифференциальный закон, а уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии материальной точки, является интегральным законом.

Принципы механики подразделяются еще на *невариационные* и *вариационные*. Невариационные законы устанавливают соотношение между величинами, имеющими место для действительного движения. Вариационные устанавливают признаки, отличающие действительное движение от всех других движений, кинематически возможных. Примером вариационных дифференциальных принципов служит принцип возможных перемещений и общее уравнение механики. Известен ряд вариационных интегральных принципов, обладающих различной общностью. Наиболее общим является принцип, установленный Гамильтоном и обобщенный Остроградским, или принцип экстремального действия.

Заканчивая изучение основ аналитической механики, остановимся на двух схемах построения классической механики, применявшихся выше. Первая из них основывается на законах Ньютона, из которых следует все содержание положений и выводов механики. Отличительной чертой в этой схеме является подход к силе как причине изменения механического состояния. Такой подход в известной мере нагляден.

Вторая схема имеет в своей основе интегральный вариационный принцип Остроградского — Гамильтона. Она в физическом плане является более формальной, но зато и более общей, ибо распространяется за пределы классической механики. Исходными понятиями здесь являются действие, функция Лагранжа; они весьма абстрактны.

Принцип экстремального действия охватывает и немеханические явления, находя применение в электродинамике и теории относительности, термодинамике и статистической физике, квантовой механике и других разделах теоретической физики. Такое широкое применение принципа тесно связано с методом обобщенных координат. Уравнения Лагранжа не ограничены реальным евклидовым пространством. Только для свободной точки они представляют уравнения движения в координатах трехмерного пространства. В случае системы со связями автоматический учет действия сил реакций связей осуществляется уже самим выбором обобщенных координат, а число их определяет мерность пространства конфигураций. Переход к бесконечномерному пространству конфигураций позволяет применить

принцип экстремального действия к системам с бесконечным числом степеней свободы — физическим полям.

Полезно подчеркнуть, что если механика основывается на аксиомах Ньютона, то при теоретическом нахождении кинематических уравнений движения должны быть *заданы силы*. Если же речь идет о второй схеме, лагранжевом или гамильтоновом формализме, то должны быть заданы *функция Лагранжа* или *Гамильтона*. Конкретные формулы как для сил, так и для названных функций в рамках механики не выводятся, а задаются.

ГЛАВА VII. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В § 12 мы выяснили, что благодаря закону сохранения полной механической энергии движение материальной точки может быть ограничено некоторой областью пространства. Это утверждение справедливо и для системы материальных точек. Метод обобщенных координат, изложенный в предыдущей главе, позволяет сократить число независимых параметров, определяющих движение несвободной системы материальных точек. Число независимых параметров — обобщенных координат — равно числу степеней свободы системы; движение системы рассматривается как движение изображающей ее точки в пространстве конфигураций. Многие системы описываются только одной координатой, так как обладают всего одной степенью свободы. Для таких систем характерно колебательное движение.

§ 25. Одномерный гармонический осциллятор

25.1. Одномерное движение. *Одномерным называют движение системы с одной степенью свободы.* Рассмотрим систему точек со стационарными потенциальными силами и стационарными идеальными связями. Для нее выполняется закон сохранения полной механической энергии:

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q) = \text{const},$$

поэтому проводится качественное исследование одномерного движения по графикам потенциальной и полной энергий. Пусть потенциальная энергия имеет вид кривой, изображенной на рисунке 25.1. Кривая имеет одну впадину — *потенциальную яму* на отрезке AB и горб — *потенциальный барьер* на отрезке BC, а правее C нигде более не пересекает график полной механической энергии — прямую AC.

Кинетическая энергия всегда положительная величина, поэтому должно выполняться условие

$$E - U(q) \geqslant 0.$$

Точки A, B, C называются *точками остановки* или *поворотными точками*, так как в этих точках потенциальная энергия равна полной механической энергии, а кинетическая — нулю.