принцип экстремального действия к системам с бесконечным числом степеней свободы — физическим полям.

Полезно подчеркнуть, что если механика основывается на аксиомах Ньютона, то при теоретическом нахождении кинематических уравнений движения должны быть *заданы силы*. Если же речь идет о второй схеме, лагранжевом или гамильтоновом формализме, то должны быть заданы *функция Лагранжа* или *Гамильтона*. Конкретные формулы как для сил, так и для названных функций в рамках механики не выводятся, а задаются.

ГЛАВА VII. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В § 12 мы выяснили, что благодаря закону сохранения полной механической энергии движение материальной точки может быть ограничено некоторой областью пространства. Это утверждение справедливо и для системы материальных точек. Метод обобщенных координат, изложенный в предыдущей главе, позволяет сократить число независимых параметров, определяющих движение несвободной системы материальных точек. Число независимых параметров — обобщенных координат — равно числу степеней свободы системы; движение системы рассматривается как движение изображающей ее точки в пространстве конфигураций. Многие системы описываются только одной координатой, так как обладают всего одной степенью свободы. Для таких систем характерно колебательное движение.

§ 25. Одномерный гармонический осциллятор

25.1. Одномерное движение. *Одномерным называют движение системы с одной степенью свободы.* Рассмотрим систему точек со стационарными потенциальными силами и стационарными идеальными связями. Для нее выполняется закон сохранения полной механической энергии:

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q) = \text{const},$$

поэтому проводится качественное исследование одномерного движения по графикам потенциальной и полной энергий. Пусть потенциальная энергия имеет вид кривой, изображенной на рисунке 25.1. Кривая имеет одну впадину — *потенциальную яму* на отрезке AB и горб — *потенциальный барьер* на отрезке BC, а правее C нигде более не пересекает график полной механической энергии — прямую AC.

Кинетическая энергия всегда положительная величина, поэтому должно выполняться условие

$$E - U(q) \geqslant 0.$$

Точки A, B, C называются *точками остановки* или *поворотными точками*, так как в этих точках потенциальная энергия равна полной механической энергии, а кинетическая — нулю.

Рассмотрим движения, соответствующие двум участкам графика:

$$q_1 \leqslant q \leqslant q_2 \text{ и } q > q_3.$$

В потенциальной яме $q_1 \leqslant q \leqslant q_2$, движение является ограниченным с двух сторон, так как точка не может выйти за пределы интервала от q_1 до q_2. Это движение называется *финитным*.

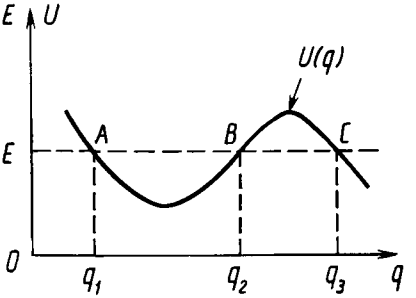

Рис. 25.1.

Движение правее точки C ограничено только с одной стороны наименьшей координатой q_3. Координата изменяется от q_3 до ∞. Если область движения не ограничена или ограничена лишь с одной стороны, то движение называется *инфинитным*. (Понятие финитного и инфинитного движения рассматривалось ранее для свободной точки в § 12. Теперь понятие расширено на систему точек со связями.)

Одномерное финитное движение является колебательным. Запишем для него функцию Лагранжа по формуле (21.1). Для рассматриваемой системы со стационарными связями кинетическая энергия имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} A\dot{q}^2,$$

как это показано в примере 20.8. Коэффициент инерции A — величина постоянная; ею может быть, например, масса точки, момент инерции, приведенная масса системы двух точек. Итак, лагранжиан системы имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} A\dot{q}^2 - U(q).$$

Соответствующие дифференциальные уравнения рассмотрены в следующем параграфе.

Как уже говорилось, одномерность движения системы нескольких материальных точек обеспечивается связями. В качестве примера можно привести системы связанных тел, рассмотренных ранее в § 7, математический и физический маятники, вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Но одномерным может быть и движение свободной материальной точки. Таково, например, прямолинейное движение. Иногда и криволинейное движение свободной точки удается свести к одномерному, написав одномерный эффективный потенциал (§ 27).

25.2. Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний системы с одной степенью свободы. Пусть имеется система с одной степенью свободы. Исследуем движение системы около положения устойчивого равновесия.

Обозначим через q единственную обобщенную координату системы. Положение равновесия системы определяется из уравнения

$$Q(q) = 0,$$

где Q — обобщенная сила. Рассмотрим только потенциальные силы. Тогда условие равновесия сводится к требованию

$$Q = -\frac{\partial U}{\partial q} = 0.$$

Как говорилось ранее, в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет экстремальное значение. Положению устойчивого равновесия соответствует ее минимальное значение, при котором малое отклонение вызывает появление силы, возвращающей систему в прежнее состояние (восстанавливающая сила). Таким образом, в положении устойчивого равновесия

$$\frac{d^2U}{dq^2} > 0.$$

Пусть q_0 — соответствующая координата. Обозначим через x отклонение системы от положения равновесия. Тогда

$$U(q) = U(q_0 + x).$$

По условию x должно быть малой величиной. Разложив потенциальную энергию в ряд по степеням малой величины x, получаем:

$$U(q_0 + x) = U(q_0) + \left(\frac{dU}{dq}\right)_0 x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 x^2 + \ldots$$

Примем потенциальную энергию в положении равновесия равной нулю: $U(q_0) = 0$. (Это нормировка потенциальной энергии.) Коэффициент $\left(\frac{dU}{dq}\right)_0$ при первой степени смещения обращается в нуль вследствие необходимого условия равновесия, а коэффициент при квадрате смещения должен быть больше нуля (условие минимума U), т. е.

$$\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 = k > 0.$$

Пренебрегая членами с высшими степенями малой величины x, получаем следующее приближенное выражение для потенциальной энергии системы в окрестности точки устойчивого равновесия:

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

Обобщенная же сила имеет вид[1]:

$$Q = -\frac{\partial U}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx.$$

Итак, если отклонения системы от положения равновесия до-

[1] Для функции одной переменной q различия между обозначениями $\frac{d}{dq}$ и $\frac{\partial}{\partial q}$ нет.

статочно малы, восстанавливающая сила имеет характер *квазиупругой силы*.

Кинетическая энергия системы для данного простейшего случая определяется формулой $T = A(q)\dot{q}^2$

Коэффициент инерции $A(q)$ должен быть либо постоянным, либо медленно изменяющейся функцией координаты q. Учитывая малые изменения координаты q при движении системы около положения равновесия, коэффициент инерции можно считать постоянным и ввести обозначение $A(q) = A(q_0) = m$. Лагранжиан системы получает следующее окончательное выражение: $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$.

С помощью формул (21.2) получаем дифференциальное уравнение движения системы:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{25.1}$$

Это простейшее линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для решения его разделим обе части равенства на коэффициент при высшей производной и одновременно введем обозначение:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0.$$

Уравнение примет вид: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Корни его характеристического уравнения

$$s^2 + \omega_0^2 = 0$$

будут мнимыми сопряженными, т. е.

$$s_1 = i\omega_0,\ s_2 = -i\omega_0.$$

Общий интеграл нам известен из теории линейных дифференциальных уравнений:

$$x = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t. \tag{25.2}$$

Если ввести новые произвольные постоянные, связанные со старыми соотношениями

$$C_1 = A\sin\alpha,\ C_2 = A\cos\alpha,$$

то общему интегралу можно придать следующий вид: $x = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$.

Система, как это видно из полученного решения, совершает простые гармонические колебания с циклической частотой ω_0.

Системы, совершающие колебания, принято называть *осцилляторами*. В данном случае мы имеем *гармонический осциллятор*.

Амплитуда A и начальная фаза α, являясь произвольными постоянными интегрирования, определяются начальными условиями движения.

Пример 25.1. **Составление уравнения движения для крутильных колебаний часового балансира.**

Обобщенной координатой для колесика-балансира служит угол φ поворота

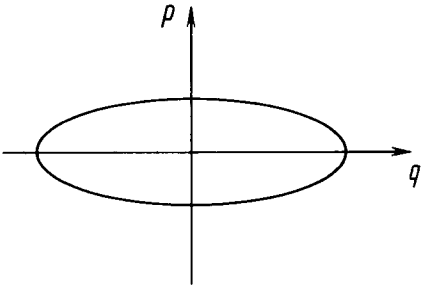

Рис. 25.2.

балансира от положения равновесия. Коэффициент инерции $m = I$ является моментом инерции балансира относительно оси вращения. Восстанавливающая (обобщенная) сила представляет момент, развивающийся при закручивании спиральной пружины (волоска). Величина момента силы пропорциональна углу φ, т. е. $Q = -k\varphi$. Дифференциальное уравнение колебаний балансира имеет вид: $I\ddot{\varphi} + k\varphi = 0$. Из уравнения для циклической частоты его колебаний получается значение

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}},$$

откуда постоянство хода механических часов определяется постоянством циклической частоты колебаний балансира ω_0.

25.3. Фазовые траектории гармонического осциллятора. Движение системы n точек в реальном трехмерном пространстве можно рассматривать как движение одной изображающей точки в пространстве, образованном обобщенными координатами q_k. (Пространство конфигураций описано в § 19.)

Когда число координат фиктивного пространства невелико (оно уменьшается связями), возможны наглядные геометрические интерпретации движения системы по ее изображающей точке. Например, для гармонического осциллятора изображающая точка в пространстве конфигураций совершает гармонические колебания на оси q (или x) около положения равновесия.

Колебания гармонического осциллятора могут быть рассмотрены и в фазовом пространстве q, p, описанном в § 23. Для этого используем выражение для полной механической энергии системы:

$$E = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{kq^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}.$$

Разделим обе части данного равенства на E:

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2\frac{E}{k}} = 1.$$

Но это уравнение эллипса с полуосями

$$a = \sqrt{2mE}, \quad b = \sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

Таким образом точка, изображающая систему, в фазовом пространстве в процессе движения находится *на эллипсе,* который и служит для системы *фазовой траекторией* (рис. 25.2). Так как площадь эллипса равна πab, то с учетом значений a и b имеем:

$$\pi ab = 2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi E}{\omega_0} = \frac{E}{\nu},$$

т. е. фазовый эллипс определяется энергией системы и частотой колебаний. (Последнее соотношение сыграло важную роль в квантовой

физике при формулировке правила квантования электронных орбит в атоме.)

Пример 25.2. **Составление и решение уравнений негармонических затухающих колебаний.**

Выше рассмотрены колебания системы без диссипативных сил. Однако на практике свободные колебания системы всегда *затухающие*. Затухание колебаний обусловлено наличием сил сопротивления среды движению тела. Подобные силы являются функциями скорости движения. При малых скоростях, с которыми имеем дело при малых колебаниях, силы сопротивления с достаточным приближением можно считать пропорциональными скорости. Для исследования влияния таких сил на процесс свободных колебаний нужно к квазиупругой обобщенной силе добавить слагаемое $-\beta\dot{x}$, где β — коэффициент вязкого трения. Тогда дифференциальное уравнение движения приобретает следующий вид:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0.$$

Обозначим для сокращения записи

$$\frac{\beta}{m} = \gamma, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

и получим:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{25.3}$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка, однородное, с постоянными коэффициентами.

Составляем для уравнения (25.3) характеристическое уравнение

$$s^2 + \gamma s + \omega_0^2 = 0.$$

Его корнями являются выражения

$$s_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}. \tag{25.4}$$

В зависимости от численных значений коэффициентов уравнения корни могут быть комплексными сопряженными или действительными. Этим двум случаям соответствуют разные движения системы.

Пусть $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$. Тогда корни характеристического уравнения можно представить в виде

$$s_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega',$$

а частные решения дифференциального уравнения для этого случая окажутся следующими:

$$x = e^{st} = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{\pm i\omega' t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot (\cos\omega' t \pm i \sin\omega' t).$$

Вещественная часть и множитель при мнимой единице комплексного решения по основному свойству линейного уравнения также являются его решениями. Это дает возможность сразу написать общий интеграл в вещественной форме:

$$x = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot (C_1 \cos\omega' t + C_2 \sin\omega' t). \tag{25.5}$$

Преобразовав сумму, стоящую в скобках, как это показано в предыдущем параграфе, получаем другой вид общего интеграла уравнения:

$$x = A' e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega' t + \alpha'). \tag{25.6}$$

Хотя это решение и не представляет собой периодическую функцию времени, оно описывает колебательное движение, так как отклонение системы от положения равно-

весия через равные промежутки времени меняет знак, непрерывно уменьшаясь по абсолютной величине Такое движение называется *затухающим колебанием*

Величина

$$\omega' = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

является циклической частотой затухающих колебаний Так как ω' всегда меньше ω_0, сопротивление движению уменьшает частоту колебаний Отношение абсолютных величин отклонений системы от положения равновесия, разделенных полупериодом колебаний $\frac{T}{2}$, определяет быстроту затухания колебаний, обозначим его через Δ

$$\Delta = \frac{|x(t)|}{\left|x\left(t + \frac{T}{2}\right)\right|} = e^{\frac{\gamma}{4}T}$$

Величина

$$\delta = \ln\Delta = \frac{\gamma}{4}T$$

носит название логарифмического декремента затухания

Рассмотрим теперь второй случай, когда $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$ Корни характеристического уравнения, данные формулой (25 4), в этом случае будут вещественными отрицательными Обозначив их через $-a_1$ и $-a_2$, получим общий интеграл в виде $x = C_1e^{-a_1t} + C_2e^{-a_2t}$

Этому решению соответствует движение с монотонным убыванием отклонения от положения равновесия изменений знака отклонения через равные промежутки времени здесь не происходит Такое движение называется *апериодическим*

В случае, когда $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$, имеем один корень (кратный) характеристического уравнения и можем построить только одно частное решение Второе частное решение нужно находить другим способом Для нас существенно, что и в этом случае движение будет также апериодическим

Пример 25 3 **Составление и решение уравнения вынужденных колебаний с учетом трения.**

Кроме квазиупругой силы и силы сопротивления, нужно учесть и внешнюю силу, являющуюся заданной функцией времени $\vec{F} = \vec{F}(t)$ Дифференциальное уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{x} + \beta x + kx = F(t) \qquad (25\ 7)$$

Движение системы описывается теперь линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка Общий интеграл неоднородного уравнения, как известно из курса математического анализа, равен сумме общего интеграла однородного уравнения, получающегося из (25 7) отбрасыванием правой части, и частного решения неоднородного уравнения (25 7)

Первое слагаемое описывает затухающие колебания, рассмотренные уже в примере 25 2 Второе слагаемое надо найти, оно определяется заданной внешней силой Движение системы можно рассматривать как результат наложения на свободные колебания *вынужденных* колебаний, вызванных внешней периодической силой

Так как свободные колебания являются затухающими, то по прошествии достаточно большого промежутка времени от начала движения они исчезают Установившееся движение системы тогда описывается полностью частным решением неоднородного уравнения Мы и ограничимся анализом только установившихся колебаний системы

Наибольший интерес представляет периодическая внешняя сила, изменяющаяся по закону простого гармонического колебания $F = F_0\cos\omega t$ Этот случай и будем рассматривать

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \qquad (25\ 8)$$

Здесь F_0 — амплитуда и ω — циклическая частота возмущающей силы Для получения интересующего нас частного решения воспользуемся методом комплексной функции

Заменим уравнение (25 8) на следующее

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \qquad (25\ 9)$$

С учетом формулы Эйлера

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

и линейности уравнения заключаем, что вещественная часть решения уравнения (25 9) есть в то же время и решение интересующего нас уравнения (25 8) Поэтому для получения частного решения уравнения (25 8) решаем уравнение (25 9) и выделяем в решении вещественную часть Ищем частное решение в виде

$$x = Be^{i\omega t} \qquad (25\ 10)$$

После подстановки предполагаемого решения в (25 9) и сокращения на общий множитель $e^{i\omega t}$ получаем алгебраическое уравнение для определения постоянной B

$$B(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m}$$

Находим B и преобразуем полученное выражение к показательной форме комплексного числа

$$B = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} = \frac{F_0}{m}\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}},$$

где

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Вносим значение B в решение (25 10) и выделяем вещественную часть

$$x = \frac{\frac{F_0}{m}\cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \qquad (25\ 11)$$

Это выражение описывает вынужденные колебания системы

Проведем краткое исследование движения системы Прежде всего отметим, что вынужденные колебания являются незатухающими простыми гармоническими колебаниями, происходящими с частотой возмущающей силы ω По фазе вынужденные колебания отстают от возмущающей силы на угол φ, величина и знак которого зависят от соотношения между собственной частотой колебания системы ω_0 и частотой возмущающей силы ω Самым существенным является наличие зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты возмущающей силы

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

Система обладает избирательными (селективными) свойствами «ответа» на внешние гармонические воздействия При одной и той же возмущающей силе вызываемые ею колебания системы имеют различную амплитуду При значении $\omega = \omega_r$, которому соответствует минимальное значение подкоренного выражения, амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной Это *резонанс* Резонансную частоту ω_r получаем

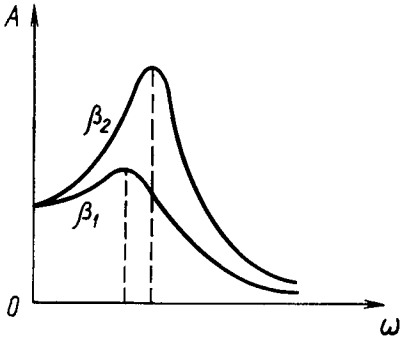

Рис. 25.3.

приравниванием нулю производной подкоренного выражения:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}.$$

При малых значениях коэффициента вязкости $\beta = m\gamma$ резонансная частота близка к частоте собственных колебаний системы. На рисунке 25.3 изображен график зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты возмущающей силы (резонансная кривая) при различных значениях коэффициента вязкости β. Острота максимума кривой самым существенным образом зависит от затухания свободных колебаний системы. Для кривых, изображенных на рисунке, $\beta_1 > \beta_2$. Для резонансной частоты сдвиг по фазе вынужденных колебаний мало отличается от $\varphi = 90°$ и вся работа внешней силы затрачивается на преодоление сопротивления движению системы (при установившихся колебаниях). Для частот, сильно отличающихся от частоты собственных колебаний системы, сдвиг фазы не равен 90° и работа внешней силы в отдельные части периода колебаний может быть отрицательной, т. е. система отдает энергию телам, вынуждающим колебания.

Пример 25.4. **Составление и решение уравнения вынужденных колебаний гармонического осциллятора без учета сопротивления.**

В рассматриваемом случае колебаний без трения дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (25.12)$$

(При этом мы ввели начальную фазу φ_0 в выражение возмущающей силы.) Общий интеграл этого уравнения, как видно из предыдущего, будет равен сумме общего интеграла соответствующего однородного уравнения (25.12) и частного решения рассматриваемого уравнения (25.12). Последнее получим из (25.11), положив $\gamma = 0$ и учитывая наличие φ_0. Тогда

$$x = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (25.13)$$

Решение представляет суперпозицию гармонических колебаний, причем последнее слагаемое в формуле (25.13) имеет амплитуду, зависящую от частоты вынуждающей силы. Резонанс осуществляется при $\omega = \omega_0$, и решение теряет смысл ($x = \infty$, так как не учтено сопротивление движению). При ω, значительно отличающейся от ω_0, последним членом можно пренебречь и рассматривать только простое гармоническое колебание. Особый интерес представляет движение системы вблизи резонанса. Рассмотрим это движение.

Сначала найдем произвольные постоянные интегрирования в формуле (25.13) при заданных условиях: $x|_{t=0} = x_0$, $\dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0$.

Получим:

$$C_1 = x_0 + \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\varphi_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}.$$

Общий интеграл примет вид:

$$x = x_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin\omega t - \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\varphi_0\cos\omega_0 t +$$
$$+ \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos\omega t\cos\varphi_0 - \sin\omega t\sin\varphi_0).$$

Чтобы наглядно выяснить характер движения системы при приближении к резонансу, положим, что $\omega_0 - \omega = \varepsilon$ — величина малая по сравнению с ω. Тогда

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) = \varepsilon(\omega_0 + \omega_0 - \varepsilon) \approx 2\omega_0\varepsilon.$$

(Пренебрегли квадратом ε.) Полагая для упрощения результата $x = \dot{x}_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$, получим:

$$x = \frac{F_0}{2m\omega_0\varepsilon}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t) = \frac{F_0}{2m\omega_0\varepsilon}|\cos(\omega_0 - \varepsilon)t - \cos\omega_0 t| =$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_0\varepsilon}\sin\frac{\varepsilon t}{2}\sin\left(\omega_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Пренебрегая малой величиной ε, запишем решение уравнения в окончательной форме:

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0\varepsilon}\sin\frac{\varepsilon t}{2}\sin\omega_0 t = \Phi(t)\sin\omega_0 t.$$

Так как $\varepsilon \ll \omega_0$, то функцию $\Phi(t)$ можно считать амплитудой колебаний системы с частотой ω_0, медленно изменяющейся по синусоидальному закону. Это *биения,* полученные при сложении собственных колебаний системы с частотой ω_0 и вынужденных колебаний с частотой, отличающейся на малую величину ε.

При резонансе вид функции изменяется:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\sin\frac{\varepsilon t}{2} = \frac{t}{2}.$$

Колебания принимают вид:

$$x = \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

Амплитуда их линейно растет со временем, и при $t \to \infty$ отклонения могут стать сколь угодно большими, а система разрушится. На практике беспредельному росту амплитуды препятствуют силы сопротивления, которые нельзя уничтожить. Компенсация же их приводит к колебаниям с ограниченной амплитудой, как это показано в предыдущем параграфе.

§ 26. Колебания систем с несколькими степенями свободы

26.1. Малые колебания системы с несколькими степенями свободы. В этом параграфе приведем краткие сведения из теории малых *свободных* колебаний систем с несколькими степенями свободы. Для упрощения рассуждений рассматриваем систему с двумя степенями свободы (пример такой системы разобран ниже). Полученные для нее результаты можно обобщить на систему с большим числом степеней свободы.

Пусть q_1 и q_2 — обобщенные координаты системы, причем сразу примем, что $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$ соответствуют положению устойчивого равновесия.

Тогда для потенциальной энергии системы $U(q_1, q_2)$ будем иметь следующие условия:

$$U(0, 0) = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0 = 0.$$

Первое условие есть следствие нормировки потенциальной энергии, а второе необходимо для минимума потенциальной энергии