Чтобы наглядно выяснить характер движения системы при приближении к резонансу, положим, что $\omega_0 - \omega = \varepsilon$ — величина малая по сравнению с $\omega$. Тогда

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) = \varepsilon(\omega_0 + \omega_0 - \varepsilon) \approx 2\omega_0\varepsilon.$$

(Пренебрегли квадратом $\varepsilon$.) Полагая для упрощения результата $x = \dot{x}_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$, получим:

$$x = \frac{F_0}{2m\omega_0\varepsilon}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t) = \frac{F_0}{2m\omega_0\varepsilon}|\cos(\omega_0 - \varepsilon)t - \cos\omega_0 t| =$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_0\varepsilon}\sin\frac{\varepsilon t}{2}\sin\left(\omega_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Пренебрегая малой величиной $\varepsilon$, запишем решение уравнения в окончательной форме:

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0\varepsilon}\sin\frac{\varepsilon t}{2}\sin\omega_0 t = \Phi(t)\sin\omega_0 t.$$

Так как $\varepsilon \ll \omega_0$, то функцию $\Phi(t)$ можно считать амплитудой колебаний системы с частотой $\omega_0$, медленно изменяющейся по синусоидальному закону. Это *биения,* полученные при сложении собственных колебаний системы с частотой $\omega_0$ и вынужденных колебаний с частотой, отличающейся на малую величину $\varepsilon$.

При резонансе вид функции изменяется:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\sin\frac{\varepsilon t}{2} = \frac{t}{2}.$$

Колебания принимают вид:

$$x = \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

Амплитуда их линейно растет со временем, и при $t \to \infty$ отклонения могут стать сколь угодно большими, а система разрушится. На практике беспредельному росту амплитуды препятствуют силы сопротивления, которые нельзя уничтожить. Компенсация же их приводит к колебаниям с ограниченной амплитудой, как это показано в предыдущем параграфе.

## § 26. Колебания систем с несколькими степенями свободы

**26.1. Малые колебания системы с несколькими степенями свободы.** В этом параграфе приведем краткие сведения из теории малых *свободных* колебаний систем с несколькими степенями свободы. Для упрощения рассуждений рассматриваем систему с двумя степенями свободы (пример такой системы разобран ниже). Полученные для нее результаты можно обобщить на систему с большим числом степеней свободы.

Пусть $q_1$ и $q_2$ — обобщенные координаты системы, причем сразу примем, что $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$ соответствуют положению устойчивого равновесия.

Тогда для потенциальной энергии системы $U(q_1, q_2)$ будем иметь следующие условия:

$$U(0, 0) = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0 = 0.$$

Первое условие есть следствие нормировки потенциальной энергии, а второе необходимо для минимума потенциальной энергии

в положении равновесия. Разлагаем теперь потенциальную энергию в ряд:

$$U(q_1, q_2) = U(0, 0) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right) q_2^2\right] + \ldots$$

Ограничимся в разложении квадратичными членами и введем обозначения:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 = k_{1,1}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 = k_{1,2}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0 = k_{2,2}.$$

Приходим к приближенному выражению для потенциальной энергии системы:

$$U = \frac{1}{2}(k_{1,1} q_1^2 + 2k_{1,2} q_1 q_2 + k_{2,2} q_2^2) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{2} k_{i,k} q_i q_k.$$

Она оказалась положительной однородной квадратичной формой обобщенных координат. Связи, ограничивающие свободу движения, рассматриваются в задаче только стационарные идеальные. Для кинетической энергии системы имеем поэтому также однородную квадратичную форму обобщенных скоростей (см. пример 20.8):

$$T = \frac{1}{2}(m_{1,1}\dot{q}_1^2 + 2m_{1,2}\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{2,2}\dot{q}_2^2) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{2} m_{i,k}\dot{q}_i\dot{q}_k.$$

Коэффициенты инерции $m_{i,k}$ в рассматриваемом приближении будут постоянными числами. Лагранжиан системы для движений вблизи положения устойчивого равновесия имеет следующий вид:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{2}(m_{i,k}\dot{q}_i\dot{q}_k - k_{i,k} q_i q_k).$$

Находим значения производных от функции Лагранжа, нужные для составления уравнений движения системы:

$$-\frac{\partial L}{\partial q_1} = k_{1,1}q_1 + k_{1,2}q_2, \qquad -\frac{\partial L}{\partial q_2} = k_{2,2}q_2 + k_{1,2}q_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m_{1,1}\dot{q}_1 + m_{1,2}\dot{q}_2, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_{2,2}\dot{q}_2 + m_{1,2}\dot{q}_1.$$

Подставляя найденные значения производных в уравнение Лагранжа (21.2) и проведя простые выкладки, приходим к системе двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, описывающей малые свободные колебания механической системы с двумя степенями свободы:

$$\begin{cases} m_{1,1}\ddot{q}_1 + m_{1,2}\ddot{q}_2 + k_{1,1}q_1 + k_{1,2}q_2 = 0, \\ m_{1,2}\ddot{q}_1 + m_{2,2}\ddot{q}_2 + k_{1,2}q_1 + k_{2,2}q_2 = 0. \end{cases} \qquad (26.1)$$

Ищем решение системы в виде следующих комплексных функций:

$$q_1 = A_1 e^{i\omega t},\ q_2 = A_2 e^{i\omega t}, \tag{26.2}$$

где $A_1$, $A_2$ и $\omega$ — постоянные, которые подлежат определению. После подстановки предполагаемого решения в дифференциальные уравнения (26.1) приходим к алгебраической системе двух линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} (-\omega^2 m_{1,1} + k_{1,1}) A_1 + (-\omega^2 m_{1,2} + k_{1,2}) A_2 = 0, \\ (-\omega^2 m_{1,2} + k_{1,2}) A_1 + (-\omega^2 m_{2,2} + k_{2,2}) A_2 = 0. \end{cases} \tag{26.3}$$

Система допускает отличные от нулевых (нетривиальные) решения, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m_{1,1} + k_{1,1} & -\omega^2 m_{1,2} + k_{1,2} \\ -\omega^2 m_{1,2} + k_{1,2} & -\omega^2 m_{2,2} + k_{2,2} \end{vmatrix} = 0. \tag{26.4}$$

В форме определителя (26.4) записано уравнение, называемое характеристическим или вековым: оно определяет значение постоянной $\omega$. В нашем случае характеристическое уравнение биквадратное и для $\omega^2$ получаются два значения $\omega_1^2$ и $\omega_2^2$, что приводит к двум вещественным положительным $\omega_1$ и $\omega_2$. По физическому смыслу величины $\omega_1$ и $\omega_2$ являются *собственными частотами* колебаний системы; *число их всегда равно числу степеней свободы.*

Подставляя в уравнение (26.3) допустимые значения собственных частот $\omega = \omega_1, \omega_2$, можно вычислить соответствующие значения всех коэффициентов:

$$A_1 = A_1^{(1)},\ A_1^{(2)},$$
$$A_2 = A_2^{(1)},\ A_2^{(2)}.$$

После этого можно написать частные решения (26.2) системы в виде

$$q_1 = A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t},\ q_2 = A_2^{(1)} e^{i\omega_1 t} + A_2^{(2)} e^{i\omega_2 t}. \tag{26.5}$$

Каждое слагаемое в частных решениях в силу линейности дифференциальных уравнений также есть решение системы. Умножая эти решения-слагаемые на произвольные постоянные и суммируя, получаем общее решение системы (26.1) в комплексной форме

$$\begin{cases} q_1 = C_1^{(1)} A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + C_1^{(2)} A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t}, \\ q_2 = C_2^{(1)} A_2^{(1)} e^{i\omega_1 t} + C_2^{(2)} A_2^{(2)} e^{i\omega_2 t}. \end{cases} \tag{26.6}$$

Координаты $q$ — величины вещественные, поэтому получаем вещественные решения аналогично формуле (25.2):

$$\begin{cases} q_1 = C_{1,1} B_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1) + C_{1,2} B_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2), \\ q_2 = C_{2,1} B_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1) + C_{2,2} B_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2), \end{cases} \tag{26.7}$$

где $C_{ik}$ — новые произвольные постоянные интегрирования, а константы $B$ и $\beta$ заменили найденные ранее $A_k^i$.

Наиболее существенным отличием малых колебаний системы с несколькими степенями свободы от системы с одной степенью свободы является *наложение друг на друга простых гармонических колеба-*

*ний с различными собственными частотами для каждой степени свободы.* Так как число собственных частот колебаний системы равно числу степеней ее свободы, то при воздействии на систему внешней периодической силы резонанс имеет место при приближении частоты возмущающей силы к любой из собственных частот.

Изложенные выше элементы теории линейных колебаний описывают процессы колебаний не только механических систем. Колебания, имеющие место в электрических цепях, как это показано в курсе электродинамики, описываются дифференциальными уравнениями, аналогичными рассмотренным выше.

Важной особенностью дифференциальных уравнений, описывающих малые колебания, является их *линейность*. По этой причине малые колебания получили название линейных. Линейные колебания системы сравнительно просты, подчиняются принципу суперпозиции, но они не до конца исчерпывают реальные колебания, так как линейность дифференциальных уравнений является результатом пренебрежения членами высших порядков малости в разложении потенциальной энергии по степеням отклонений системы от положения равновесия. Учет высших членов приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям. За последние десятилетия интерес к нелинейным колебаниям значительно усилился в связи с научно-техническим прогрессом.

В развитии теории нелинейных колебаний основной вклад сделан советскими физиками и математиками, в частности Л. И. Мандельштамом, А. А. Андроновым, Н. Н. Боголюбовым и другими.

**26.2*. Понятие о нормальных координатах.** Рассматривая колебания системы с двумя степенями свободы, мы нашли, что каждая обобщенная координата испытывает два гармонических колебания с разными частотами, т. е. совершает *негармоническое* колебание. Докажем, что величины

$$\begin{cases} Q_1 = B_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1), \\ Q_2 = B_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2) \end{cases} \tag{26.8}$$

могут быть приняты за новые обобщенные координаты системы. Для этого необходимо установить формулы их связи со старыми координатами $q$. Подставляя выражения (26.8) в найденные выше кинематические уравнения колебаний (26.7), получаем искомые формулы перехода от одних координат к другим:

$$\begin{cases} q_1 = C_{1,1} Q_1 + C_{1,2} Q_2, \\ q_2 = C_{2,1} Q_1 + C_{2,2} Q_2, \end{cases} \tag{26.9}$$

нужно только систему уравнений (26.9) решить относительно $Q$.

В новых координатах $Q$ уравнения колебаний для каждой степени свободы являются независимыми и гармоническими, как это показывают выражения (26.8). Такие координаты называются *нормальными* или *главными*. В нормальных координатах система сводится к набору гармонических осцилляторов, каждый из которых определяется уравнением

$$\ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = 0. \tag{26.10}$$

Соответственно кинетическая и потенциальная энергии, лагранжиан в этих координатах принимают простейший вид:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{Q}_1^2 + m_2 \dot{Q}_2^2), \quad U = \frac{1}{2}(k_1 Q_1^2 + k_2 Q_2^2), \quad L = T - U, \tag{26.11}$$

где $m$ — коэффициент инерции (см. пример 20.7), а $k$ — коэффициент квазиупругих сил, причем $k = \omega^2 m$.

Переход к нормальным координатам можно рассматривать и осуществлять как преобразование координат, дающее кинетическую и потенциальную энергии в виде формул (26.11). Этот путь и реализуется на практике.

Пример 26.1. **Колебания системы с двумя степенями свободы и выбор нормальных координат.**

Рассмотрим движение тяжелой точки, подвешенной на пружине (рис. 26.1). Для составления уравнений запишем кинетическую и потенциальную энергии точки в выбранных для задачи полярных координатах:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2),$$

$$U = -mgr\cos\varphi + \frac{k}{2}(r - l)^2,$$

где $l$ — длина пружины.

Далее следует найти разложение $U$ около положения равновесия, для чего потребуются первые и вторые производные функции $U$. Вычислим их:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -mg\cos\varphi + k(r - l), \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = mgr\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi} = mg\sin\varphi, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mgr\cos\varphi.$$

В положении равновесия $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$, поэтому получаем два уравнения:

$$\begin{cases} -mg\cos\varphi + k(r - l) = 0, \\ mg\,r\sin\varphi = 0, \end{cases}$$

откуда находим значения координат точки в положении равновесия:

$$\varphi_0 = 0, \quad r_0 = l + \frac{mg}{k}.$$

Это устойчивое равновесие. Запишем кинетическую энергию системы как функцию новых координат: $\Delta r = r - r_0$ и $\varphi$, а также разложим потенциальную энергию около точки равновесия. Получим формулы

$$T = \frac{m}{2}\left[(\Delta\dot{r})^2 + r_0^2\dot{\varphi}^2\right]; \; U = \frac{1}{2}\left[k(\Delta r)^2 + mgr_0\varphi^2\right].$$

Из них видно, что координата $\Delta r = r - r_0$ и координата $\varphi$ являются нормальными для данной системы, а уравнения Лагранжа для ее движения оказываются независимыми:

$$m\Delta\ddot{r} + k\Delta r = 0, \quad r_0\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.$$

Теперь находятся решения — это гармонические колебания величин $\Delta r$ и $\varphi$:

$$\Delta r = a_1\cos(\omega_1 t + \beta_1), \quad \varphi = a_2\cos(\omega_2 t + \beta_2),$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{r_0}.$$

Из решения в нормальных координатах ясен его физический смысл: колебания материальной точки складываются из гармонических колебаний ее вдоль оси пружины и пружины как математического маятника.

Пример 26.2. **Нахождение частот нормальных колебаний трехмерного гармонического осциллятора.**

Материальная точка находится в постоянном поле, в котором ее потенциальная энергия $U(x, y, z)$ имеет точку минимума. В качестве обобщенных координат вы-

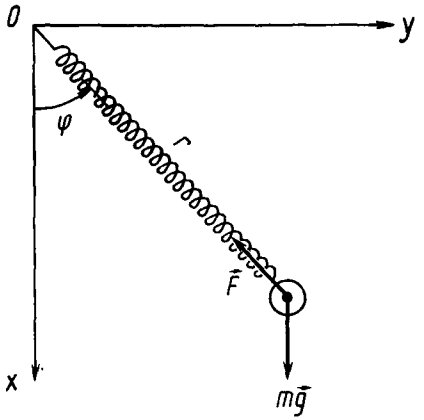


Рис. 26.1.

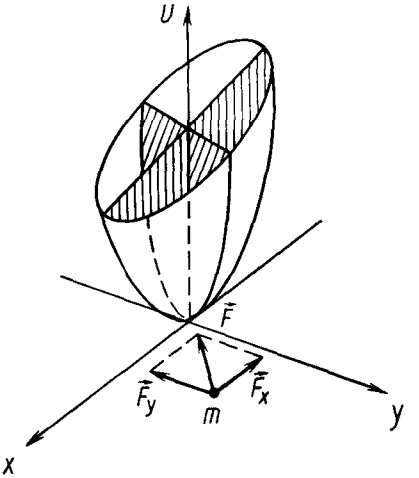


Рис. 26.2.

бираем декартовы, имеющие начало в точке, где $U$ минимальна. Кинетическая энергия определяется однородной квадратичной функцией скоростей:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

а потенциальная — формулой:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{3} k_{ik} x_i x_k \quad (x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z).$$

Повернем оси координат так, что потенциальная энергия также будет однородной квадратичной функцией координат:

$$U = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2).$$

Такой поворот соответствует совмещению осей координат с тремя ортогональными экстремальными составляющими квазиупругой силы, показанными на рисунке 26.2 для двухмерного случая[1]. Вдоль этих новых положений осей колебания, как это установлено при изучении нормальных координат, гармонические, поэтому частоты их находятся по формулам

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}},\quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}},\quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}.$$

Пример 26.3. **Колебания плоского двойного маятника в нормальных координатах.**

Плоский двойной маятник рассмотрен в примере 21.1 (см. рис. 21.1). Получены выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 b^2 \dot{\vartheta}^2 + ab m_2 \dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos(\varphi - \vartheta),$$

$$U = -ga(m_1 + m_2)\cos\varphi - m_2 g b \cos\vartheta,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -g(m_1 + m_2)a \sin\varphi;\quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -m_2 g b \sin\vartheta.$$

Из этих выражений определяется положение равновесия $\varphi = \vartheta = 0$. Равновесие

[1] При смещении точки по такой оси квазиупругая сила направлена вдоль оси.

устойчивое, так как

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = g(m_1 + m_2)\, a \cos \varphi, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = m_2 g b \cos \vartheta, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \vartheta} = 0.$$

Кинетическая энергия около положения равновесия выражается формулой

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, a^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 b^2 \dot{\vartheta}^2 + m_2 a b \dot{\varphi} \dot{\vartheta},$$

потенциальная:

$$U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, g a \varphi^2 - \frac{1}{2} m_2 g b \vartheta^2.$$

Система лагранжевых уравнений движения в соответствии с формулами (21.2) такова:

$$(m_1 + m_2)\, a \ddot{\varphi} + m_2 b \ddot{\vartheta} + (m_1 + m_2)\, g \varphi = 0,$$
$$a \ddot{\varphi} + b \ddot{\vartheta} + g \vartheta = 0.$$

Для перехода к нормальным координатам выполняем подстановку (26.2) и получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_1 (m_1 + m_2)\, (g - a\omega^2) - A_2 \omega^2 m_2 b = 0, \\ -A_1 a \omega^2 + A_2 (g - b\omega^2) = 0. \end{cases}$$

Корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)\, (g - a\omega^2) & -\omega^2 m_2 b \\ -a\omega^2 & (g - b\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

дают искомые частоты накладывающихся друг на друга колебаний, описываемых уравнениями (26.5) для каждой координаты. Вычислим их:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2 m_1 a b} \left\{ (m_1 + m_2)\, (a + b) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)\, [(m_1 + m_2)\, (a + b) - 4 m_1 a b]} \right\}.$$

Как видим, результат довольно сложный. Рассмотрим его в частном случае (при $m_1 \gg m_2$). В таком случае приближенно имеем:

$$U = -\frac{1}{2} m_1 g a \varphi^2 - \frac{1}{2} m_2 g b \vartheta^2,$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 b^2 \dot{\vartheta}^2.$$

Координаты $\varphi$ и $\vartheta$ оказались в приближении нормальными; лагранжевые уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{a} \varphi = 0, \quad \ddot{\vartheta} + \frac{g}{b} \vartheta = 0.$$

Они независимы, а решения их легко находятся:

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\, t + \alpha\right), \quad \vartheta = \vartheta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}\, t + \beta\right).$$

Таков окончательный приближенный результат решения задачи на кинематические уравнения колебания маятника в нормальных координатах.

## ГЛАВА VIII. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ

В соответствии с механической концепцией силы взаимодействия между двумя свободными материальными точками имеют центральный характер (см. § 5). Центральны в нерелятивистском приближении фундаментальные гравитационные и электромагнитные силы взаимодействия двух точек. Но в таком случае силовое поле, создан-