

устойчивое, так как

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = g(m_1 + m_2) a \cos \varphi, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = m_2 g b \cos \theta, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \theta} = 0.$$

Кинетическая энергия около положения равновесия выражается формулой

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2b^2\dot{\theta}^2 + m_2ab\dot{\varphi}\dot{\theta},$$

потенциальная:

$$U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)ga\varphi^2 - \frac{1}{2}m_2gb\theta^2.$$

Система лагранжевых уравнений движения в соответствии с формулами (21.2) такова:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)a\ddot{\varphi} + m_2b\ddot{\theta} + (m_1 + m_2)g\varphi &= 0, \\ a\ddot{\varphi} + b\ddot{\theta} + g\theta &= 0. \end{aligned}$$

Для перехода к нормальным координатам выполняем подстановку (26.2) и получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_1(m_1 + m_2)(g - a\omega^2) - A_2\omega^2m_2b = 0, \\ -A_1a\omega^2 + A_2(g - b\omega^2) = 0. \end{cases}$$

Корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(g - a\omega^2) & -\omega^2m_2b \\ -a\omega^2 & (g - b\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

дают искомые частоты накладывающихся друг на друга колебаний, описываемых уравнениями (26.5) для каждой координаты. Вычислим их:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1ab} \left\{ (m_1 + m_2)(a + b) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)[(m_1 + m_2)(a + b) - 4m_1ab]} \right\}.$$

Как видим, результат довольно сложный. Рассмотрим его в частном случае (при  $m_1 \gg m_2$ ). В таком случае приближенно имеем:

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1}{2}m_1ga\varphi^2 - \frac{1}{2}m_2gb\theta^2, \\ T &= \frac{1}{2}m_1a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2b^2\dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

Координаты  $\varphi$  и  $\theta$  оказались в приближении нормальными; лагранжевые уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{a}\varphi = 0, \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{b}\theta = 0.$$

Они независимы, а решения их легко находятся:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \left( \sqrt{\frac{g}{a}}t + \alpha \right), \quad \theta = \theta_0 \cos \left( \sqrt{\frac{g}{b}}t + \beta \right).$$

Таков окончательный приближенный результат решения задачи на кинематические уравнения колебания маятника в нормальных координатах.

## ГЛАВА VIII. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ

В соответствии с механической концепцией силы взаимодействия между двумя свободными материальными точками имеют центральный характер (см. § 5). Центральны в нерелятивистском приближении фундаментальные гравитационные и электромагнитные силы взаимодействия двух точек. Но в таком случае силовое поле, создан-

ное материальной точкой в системе отсчета, где точка покоятся, постоянно и обладает центральной симметрией. Если начало координат системы совместить с точкой, создающей поле, то

$$\vec{F} = \vec{F}(r), \quad U = U(r), \quad (27.1)$$

где  $r$  — модуль радиус-вектора произвольной точки поля.

Таким образом, задача о движении в центрально-симметричном поле оказывается для механики фундаментальной. То, что она решается в конце курса, объясняется необходимостью опираться при ее рассмотрении на положения и методы, развитые в курсе ранее. Но к анализу отдельных сторон движения под действием центральных сил мы обращались уже не раз. Так, было установлено, что при движении точки в поле центральной силы сохраняется момент импульса, а траекторией движения служит плоская кривая (см. § 10). Рассматривался пример (12.7) получения вторых интегралов движения, задача о движении системы двух взаимодействующих точек сведена к движению одной точки. В этой главе курса изучим движение материальной точки в поле центральной силы подробнее.

### § 27. Кеплерова задача

**27.1. Уравнения движения точки в центрально-симметричном поле. Одномерный эффективный потенциал поля.** В истории физики кеплеровой называется задача определения траектории небесного тела, движущегося в поле тяготения Солнца. Аналогичная задача возникает при классическом подходе к проблеме движения электрона в поле ядра.

Как уже отмечено, к понятию центрально-симметричного поля в механике приходят в связи с рассмотрением взаимодействия двух материальных точек. В § 15 показано, что сначала в этом случае нужно рассмотреть движение одной (изображающей) точки с приведенной массой под действием силы взаимодействия между точками в системе отсчета с неподвижным центром масс, т. е. движение материальной точки в центрально-симметричном поле, а затем перейти к движению каждой точки.

Ранее установлено, что под действием внутренних сил центр масс системы движется равномерно и прямолинейно. Связем с ним некоторую систему отсчета, являющуюся инерциальной, и в ней будем рассматривать движение изображающей точки под действием центральной силы, которая зависит только от расстояния между точками, т. е.  $\vec{F} = \vec{F}(r)$ ; аналогично выражение и для потенциальной энергии  $U = U(r)$ .

Так как вектор момента импульса  $\vec{L} = m'[\vec{r} \vec{v}]$  сохраняется в случае центральной силы по модулю и направлению, то все  $r$  лежат в одной плоскости, т. е. траекторией является плоская кривая, поэтому у изображающей точки две степени свободы, и для случая центрального поля целесообразен выбор полярных координат в плоскости движения с началом в центре масс. В них интеграл момента импульса

имеет вид:

$$m'r^2\dot{\varphi} = L, \quad (27.2)$$

а интеграл энергии записывается формулой

$$\frac{m'}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E. \quad (27.3)$$

В принципе эти два дифференциальных уравнения первого порядка относительно неизвестных функций  $r(t)$  и  $\varphi(t)$  и исчерпывают задачу о движении точки в центрально-симметричном поле. Для их решения достаточно подставить известное значение  $L$  с помощью (27.2) в (27.3), чтобы получить уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{m'\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2m'r^2} + U(r) = E. \quad (27.4)$$

Первый член в этом уравнении представляет кинетическую энергию при радиальном движении точки, которая всегда положительна. Второй член теперь не содержит скорости и называется *центробежной потенциальной энергией*. Таким образом, потенциальная энергия может считаться состоящей из двух частей:

$$U_e(r) = U(r) + \frac{L^2}{2m'r^2}. \quad (27.5)$$

Выражение (27.5) принято называть *эффективным потенциалом*. Он может быть положительным, отрицательным и нулем в зависимости от соотношения модулей центробежного и обычного потенциала и от знака потенциала  $U(r)$ .

Используя обозначение  $U_e$ , находя из (27.4)  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$  и разделяя переменные в уравнении (27.4), получаем интеграл уравнения движения:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m'}[E - U_e(r)]}} + t_0. \quad (27.6)$$

Если вычислить интеграл в (27.6), то при любом заданном  $U(r)$  найдется одно кинематическое уравнение движения точки  $r = r(t)$ .

Аналогично получается другое уравнение из (27.2):

$$\varphi = \frac{L}{m'} \int \frac{dt}{r^2} + \varphi_0, \quad (27.7)$$

что при найденном  $r(t)$  дает возможность получить  $\varphi(t)$ . Задача о движении точки в центральном поле  $U(r)$  решена: направление вектора момента импульса позволяет установить плоскость, в которой движется точка, а его модуль — значение энергии и начальное положение точки ( $\varphi_0$  в момент  $t_0$ ) — выбрать необходимое частное решение из (27.6) и (27.7). Нетрудно в общем виде получить и уравнение траектории. Для этого из равенства (27.6) определим  $dt$  и подставим

в (27.2), после чего получим, разделяя переменные и интегрируя:

$$\varphi = \int \frac{L/r^2}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_e(r)]}} dr + \varphi_0. \quad (27.8)$$

Заметим, что в процессе решения опущен второй знак у квадратного корня. Наличие двух знаков связано с симметрией траектории, которая видна в конкретных случаях.

**27.2. Движение в поле силы тяготения.** Вообще говоря, могут иметь место разнообразные центрально-симметричные поля по зависимости  $U$  от  $r$ . Однако наибольший практический интерес в механике представляет случай силы, управляющей движением небесных тел. Сила тяготения, приложенная к небесному телу, определяется законом всемирного тяготения:

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^3} \vec{r} = -\gamma \frac{m}{r^3} \vec{r}.$$

Задачу о движении двух тел под действием этой силы называют кеплеровой. Произведение гравитационной постоянной на массу Солнца для сокращения записи обозначено через  $\gamma$ ; называется эта величина *гауссовой постоянной*.

Для движения материальной точки в поле силы тяготения верны все полученные в предыдущем параграфе результаты. Найдем сейчас конкретный вид траектории движения.

Воспользуемся выражением потенциальной энергии (11.17) и составим лагранжиан:

$$L_{\text{л}} = T - U = \frac{1}{2} m' (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \gamma \frac{m}{r}, \quad (27.9)$$

где  $m'$  — приведенная масса точки, изображающей систему. Полярный угол  $\varphi$  является циклической координатой, а поэтому имеет место интеграл площадей:

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L_{\text{л}}}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const},$$

или

$$r^2 \dot{\varphi} = C. \quad (27.10)$$

Постоянная  $C$  является удвоенной секторной скоростью.

Теперь достаточно составить только одно уравнение

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{\text{л}}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L_{\text{л}}}{\partial r} = 0,$$

которое после проведения указанных в нем дифференцирований и сокращения на массу будет иметь вид:

$$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{m'} \frac{\gamma}{r^2} = 0,$$

где  $\frac{m}{m'} = \frac{m(m+M)}{mM} = \left(1 + \frac{m}{M}\right) = k$

— величина, близкая к единице, так как обычно  $m \leq M$ .

Пользуясь интегралом площадей, исключим из последнего уравнения  $\varphi$ , и оно приведется к уравнению для одной искомой функции  $r$ :

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} + \frac{k\gamma}{r^2} = 0. \quad (27.11)$$

Наша задача состоит в нахождении траектории небесного тела  $r = r(\varphi)$ . Поэтому целесообразно перейти от дифференцирования по времени к дифференцированию по полярному углу. Из интеграла площадей следует:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{C}{r^2}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}, \\ \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) = \frac{C}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right).\end{aligned}$$

Подстановка найденного выражения  $\ddot{r}$  в уравнение (27.11) приводит последнее к виду

$$\frac{C^2}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) - \frac{C^2}{r^3} = - \frac{k\gamma}{r^2}.$$

Для упрощения полученного дифференциального уравнения следуем последнюю подстановку:  $r = \frac{1}{x}$ . Имеем:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{x} \right) = - \frac{1}{x^2} \frac{dx}{d\varphi}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = - \frac{dx}{d\varphi}.$$

Дифференциальное уравнение для  $x = x(\varphi)$  принимает следующий окончательный вид:

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x = \frac{k\gamma}{C^2}. \quad (27.12)$$

Общий интеграл этого линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами находим обычными приемами:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{k\gamma}{C^2} + A \cos(\varphi + \alpha).$$

Здесь частное решение неоднородного уравнения есть  $x_1$ , а общее решение однородного уравнения —  $x_2$ ;  $A$  и  $\alpha$  — произвольные постоянные интегрирования. Возвращаясь к первоначальным обозначениям, приводим общий интеграл уравнения к окончательному виду:

$$r = \frac{1}{\frac{k\gamma}{C^2} + A \cos(\varphi + \alpha)} = \frac{\frac{C^2/\gamma k}{1 + \frac{AC^2}{k\gamma} \cos(\varphi + \alpha)}}{1 + \frac{AC^2}{k\gamma} \cos(\varphi + \alpha)}. \quad (27.13)$$

Общий интеграл дает уравнение кривой второго порядка в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi + \alpha)}, \quad (27.14)$$

где

$$p = \frac{C^2}{k\gamma}, \quad e = \frac{AC^2}{k\gamma} \quad (27.15)$$

— параметр и эксцентриситет орбиты. В зависимости от численного значения эксцентриситета уравнение представляет эллипс, параболу или гиперболу. Если  $e < 1$  — имеем уравнение эллипса, при  $e = 1$  — уравнение параболы, а при  $e > 1$  — гиперболы.

Вид траектории и ее параметры определяются константами  $C$  и  $A$ , причем  $C$  связана с интегралом момента импульса,  $L = mC$ ;  $A$  определяется полной энергией  $E$ , а постоянная интегрирования  $\alpha$  задает положение траектории на плоскости.

Интеграл энергии (27.3) имеет вид:

$$\frac{m'r'^2}{2} + U_e(r) = E, \quad (27.16)$$

где эффективный потенциал выражается формулой

$$U_e = -\frac{\gamma m'}{r} + \frac{1}{2} \frac{mC^2}{r^2}. \quad (27.17)$$

Для анализа допустимых траекторий выразим из (27.16) кинетическую энергию радиального движения:

$$\frac{m'r'^2}{2} = E - U_e \geqslant 0. \quad (27.18)$$

Построим график (рис. 27.1)  $U_e$  и проведем прямые  $E = \text{const}$  для различных значений полной механической энергии.  $U_e$  при  $r \rightarrow 0$  стремится к бесконечности, а при  $r \rightarrow \infty$  отрицателен и стремится к нулю. Следовательно, график пересечет один раз ось  $r$  и будет иметь вид, изображенный на чертеже.

Условие  $E - U_e \geqslant 0$  выполняется для следующих движений:

1. Если  $E_1 > 0$ , то  $r_1 \leqslant r \leqslant \infty$ . Движение инфинитное и соответствует гиперболическому.

2. Если  $E_2 = 0$ , то  $r_4 \leqslant r \leqslant \infty$ . Движение инфинитное и соответствует параболическому.

3. Если  $E_3 < 0$ , то  $r_2 \leqslant r \leqslant r_3$ . Движение финитное и соответствует эллиптическому.

4. Если  $E_4 < 0$ , то  $r = r_5 = \text{const}$ . Движение финитное и происходит по окружности.

Оказывается, что в общем случае для зависимостей  $U(r)$ , не сводящихся к рассмотренной в данной задаче, и  $U = \frac{kr^2}{2}$ , рассмотренной в примере 27.3, замкнутой траектории при финитном движении не получается, а движение происходит между «поворотными» точками  $r_2$  и  $r_3$  по траектории, изображенной на рисунке 27.2.

В заключение вопроса о движении тела в поле силы притяжения к Солнцу заметим, что изображающая точка движется по найденному эллипсу (27.14), а эллипсу планеты можно перейти с учетом формул (15.1), (15.8) и рисунка 15.4. Солнце не остается неподвиж-

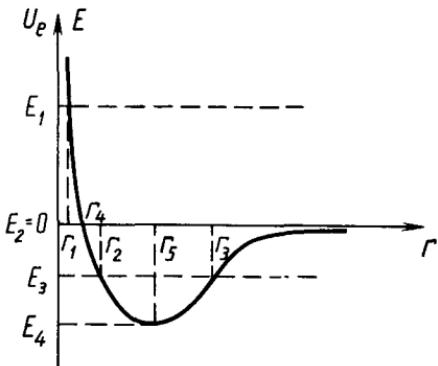


Рис. 27.1.

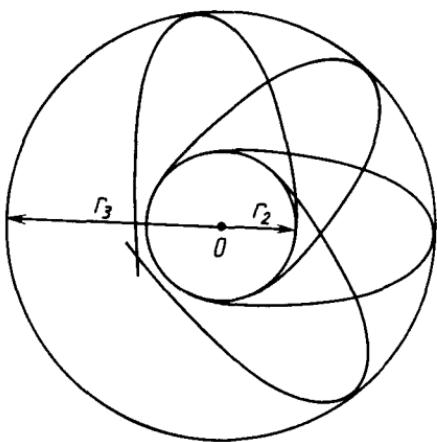


Рис. 27.2.

ным, центр его соответственно перемещается относительно центра масс системы Солнце — планета.

#### Пример 27.1. Вывод законов Кеплера из закона всемирного тяготения.

В начале XVII в. Кеплером были установлены кинематические законы движения планет на основании обобщения имеющихся результатов астрономических наблюдений. Во времена Кеплера задача, рассмотренная в § 27, не могла быть решена теоретически, так как не были открыты ни законы динамики, ни закон всемирного тяготения. В настоящее время кинематические законы Кеплера получаются как следствия законов динамики при заданной силе притяжения.

**Первый закон.** Каждая из планет движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Этот закон получен нами в процессе решения кеплеровой задачи в виде формулы (27.14). Необходимо только отметить, что с учетом движения Солнца фокус эллипса планеты совпадает не с центром Солнца, а с центром масс системы.

**Второй закон.** Радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равные площади. Он получен нами в виде интеграла площадей (27.10).

**Третий закон.** Квадраты времен (периодов) обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит. Выведем его, используя формулу (27.15). Имеем:

$$k\gamma = \frac{C^2}{p},$$

или

$$\gamma m = - \frac{m' C^2}{p}.$$

Переходя к гравитационной постоянной и массе планеты, получим:

$$GmM = - \frac{mM}{m+M} \frac{C^2}{p}.$$

И окончательно:

$$G(m+M) = \frac{C^2}{p}.$$

Постоянную  $C$  выразим через полуоси эллипса и период обращения планеты, а также вспомним значение параметра  $p = \frac{b^2}{a}$ :

$$G(m+M) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Здесь  $a$  — полуось эллипса, по которому движется изображающая точка, так как принималось во внимание движение Солнца. Измеряются же полуоси орбит планет. Из рисунка (15.4) видно, что

$$a = a' + \frac{m}{M} a' = a' \left( 1 + \frac{m}{M} \right)$$

Так что для полуоси планеты имеем:

$$\frac{T^2}{a'^3} = \frac{4\pi^2(M+m)^2}{GM^3} \approx \frac{4\pi^2}{GM} \left( 1 + \frac{2m}{M} \right).$$

Третий закон Кеплера оказался приближенным: отношение  $\frac{T^2}{a'^3}$  зависит от массы планеты  $\left( \frac{m}{M} \text{ — величина малая} \right)$ .

**Пример 27.2. Вывод закона всемирного тяготения с помощью законов Кеплера.**  
Записывая для неизвестной по модулю, но центральной силы в соответствии со вторым законом Кеплера основное уравнение динамики

$$F_r = m'(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)$$

и выполняя все преобразования, которые привели ранее к формуле (27.12), получим:

$$F_r = -m'c^2x^2 \left( \frac{d^2x}{d\phi^2} + x \right),$$

где  $x = \frac{1}{r}$

Используя первый закон Кеплера, т. е. зная уравнение орбиты

$$x = \frac{1 + e \cos(\varphi + \alpha)}{p},$$

произведем подстановку переменной  $x$  в выражение для силы:

$$F_r = -\frac{m'c^2x^2}{p}.$$

Возвратимся к переменной  $r$  и запишем выражение для силы в следующем виде:

$$F_r = -\frac{C^2m}{pr^2} \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} = \frac{C^2M}{p^2r^2} \frac{1}{1 + \frac{M}{m}}.$$

Введя обозначения:

$$\frac{C^2}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} = \gamma_c, \quad \frac{C^2}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{M}{m}} = \gamma_n,$$

имеем:

$$F_r = -\frac{\gamma_c m}{r^2} = \frac{\gamma_n M}{r^2},$$

откуда следует новое обозначение:

$$\frac{\gamma_c}{M} = \frac{\gamma_n}{m} = G,$$

и окончательно:

$$F_r = -G \frac{Mm}{r^2}, \text{ или } \vec{F} = -G \frac{Mm}{r_{1,2}} \frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}}.$$

Осталось показать, что  $G$ , а вместе с ней  $\gamma_c$  и  $\gamma_n$  — постоянные величины. Для этого следует использовать третий закон Кеплера. Из определений величин  $G$  и  $\gamma$  следует:

$$G = \frac{C^2}{p(M+m)};$$

переходя к периоду и полуоси орбиты, как в примере 27.1, получим.

$$G = \frac{4\pi a'^3(M+m)^2}{T^2 M^3}.$$

Но эта формула по уточненному закону Кеплера (см. пример 27.1) связывает  $a'$  и  $T$  с константой  $G$ . Следовательно, и введенные нами сейчас величины  $G$ ,  $\gamma_c$  и  $\gamma_n$  — константы.

**Пример 27.3. Движение точки в центрально-симметричном поле:**  $U = \frac{kr^2}{2}$ .

В соответствии с общими положениями движения будет совершаться по плоской траектории. Используем понятие эффективного потенциала:

$$U_e = \frac{kr^2}{2} + \frac{mC^2}{2r^2}.$$

График изображен на рисунке 27.3. Из условия (27.18) заключаем, что движение всегда финитное, причем минимальной энергии  $E_m$  соответствует одно расстояние от центра, т. е. траектория будет окружностью. При  $E > E_m$  движение ограничено снизу и сверху расстояниями  $r_1$  и  $r_2$ .

Дифференциальные уравнения движения получим по методу Лагранжа, выбирая в качестве (обобщенных) координат декартовы координаты на плоскости движения с началом в центре поля. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k(x^2 + y^2)}{2},$$

а уравнения движения:

$$m\ddot{x} + kx = 0, m\ddot{y} + ky = 0.$$

Такие уравнения многократно встречались в курсе. Они приводят к гармоническим колебаниям с частотой  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

$$x = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1), y = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Здесь  $a_1$  и  $a_2$  — постоянные интегрирования, дающие амплитуды колебаний. Они определяются через интеграл энергии по формулам

$$a_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{k}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{2E_2}{k}},$$

где  $E_1 = \frac{mx^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$  и  $E_2 = \frac{my^2}{2} + \frac{ky^2}{2}$  — составляющие энергии, относящиеся к движению по оси  $Ox$  и  $Oy$  (см. пример 12.10). Постоянные  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — начальные фазы — определяют ориентацию эллипса относительно осей. Если начало отсчета времени выбрать так, что при  $t = 0$   $x = 0$ , а  $y = a_2$ , то  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_2 = 0$ . В таком случае кинематические уравнения движения приводятся к виду

$$x = a_1 \sin \omega t, \quad y = a_2 \cos \omega t,$$

а траекторией движения является эллипс

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1$$

с центром в центре поля и с осями, совпадающими с осями координат. Понятно, что при  $a_1 = a_2$  получается окружность.

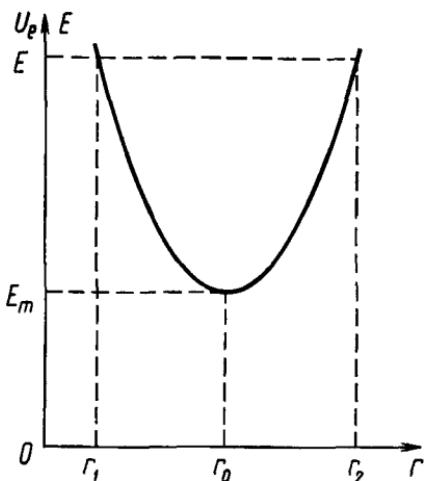


Рис. 27.3.

### Пример 27.4. Расчет первой космической скорости.

Пусть спутник уже выведен на орбиту и влияние атмосферы на его движение можно не учитывать. Тогда на него будет действовать лишь сила тяготения

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

где  $M$  — масса Земли.

Будем считать Землю однородным невращающимся шаром радиуса  $R$ . В таком случае силу тяготения выразим в виде  $F = mg$ , где  $g$  — ускорение свободного падения на расстоянии  $r$  от центра Земли. Обозначим через  $g_0$  ускорение свободного падения на поверхности Земли. Тогда имеем:

$$G \frac{Mm}{r^2} = mg, \quad G \frac{Mm}{R^2} = mg_0.$$

Из этих равенств найдем:

$$\gamma = GM = g_0 R^2, \quad g = g_0 \frac{R^2}{r^2}.$$

Теперь определим стационарную скорость  $v_c$  движения спутника по круговой орбите из условия, что нормальное ускорение в этом случае равно  $g$ :

$$\frac{v_c^2}{r} = g = g_0 \frac{R^2}{r^2}, \quad v_c = \sqrt{g_0 \frac{R^2}{r}}.$$

Скорость

$$v_c|_{r=R} = v_1 = \sqrt{g_0 R} \approx 7,9 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

называется *первой космической скоростью*. Это скорость кругового движения на уровне поверхности Земли (без учета сопротивления воздуха). Так как на некоторой высоте над поверхностью Земли скорость кругового движения меньше, то первая космическая скорость есть также скорость, которую необходимо сообщить телу на поверхности Земли под некоторым углом к ней, чтобы оно покинуло поверхность Земли.

Период обращения спутника по круговой орбите вычисляется через первую космическую скорость по формуле

$$T = \frac{2\pi r}{v_c} = \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{r^3}{g_0}}$$

### Пример 27.5. Расчет второй космической скорости.

Это минимальная скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы (без учета сопротивления воздуха) тело покинуло пределы поля тяготения Земли. Таким образом, это параболическая скорость и находит ее следует из интеграла энергии кеплеровской задачи. При условии, что полная энергия тела равна нулю, имеем:

$$\frac{mv_n^2}{2} - \frac{\gamma m}{r} = 0$$

Потенциальную энергию представим так:

$$\frac{\gamma m}{r} = mg_0 \frac{R^2}{r}.$$

Интеграл энергии принимает вид:

$$\frac{mv_n^2}{2} - mg_0 \frac{R^2}{r} = 0,$$

отсюда

$$v_n = \sqrt{2g_0 \frac{R^2}{r}}, \quad v_n|_{r=R} = \sqrt{2g_0 R} = 11,2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

Это вторая космическая скорость

Движение по эллиптической орбите осуществляется, если начальная скорость больше  $v_c$ , но меньше  $v_n$ .

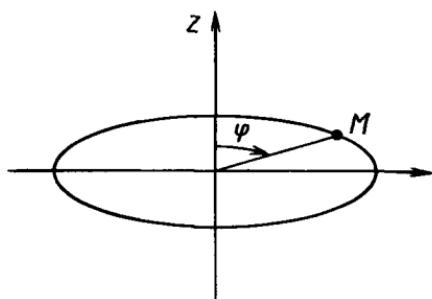


Рис. 27.4.

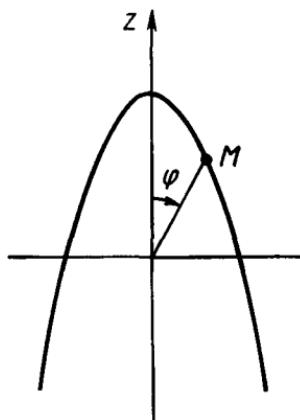


Рис. 27.5.

**Пример 27.6. Расчет скорости движения тела в разных точках орбиты.**

Орбитальная скорость в любой точке траектории движения в центральном поле тяготения рассчитывается в полярных координатах по формуле

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Однако использовать непосредственно формулу мы не можем, так как не нашли явной зависимости радиуса  $r$  от времени  $t$  (см. § 27).

Воспользуемся уже примененным ранее приемом и перейдем к дифференцированию по полярному углу  $\varphi$  (см. вывод формулы (27.12)). Учтем также, что  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}$ .

Получим:

$$v^2 = C^2 \left[ \frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right].$$

Удобно ввести  $x = \frac{1}{r}$ , после чего получим:

$$v^2 = C^2 \left[ \left( \frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + x^2 \right].$$

Теперь с помощью последнего выражения скорость может быть найдена, если известно уравнение траектории и ее параметры. Воспользовавшись уравнением траектории

$$x = \frac{1 + e \cos \varphi}{p},$$

имеем:

$$v^2 = \frac{C^2}{p^2} (1 + e^2 + 2e \cos \varphi).$$

Скорость выражена как функция полярного угла. Рассмотрим частные случаи движений. При эллиптическом движении постоянная площадей  $C$  и период обращения тела связаны соотношениями

$$C = \frac{2\pi ab}{T} = \sqrt{\gamma p} = \sqrt{GMp},$$

где  $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси эллипса;  $p$  — параметр его; эксцентриситет  $e < 1$ . Выбор начала отсчета углов соответствует максимальной скорости (рис. 27.4).

Для верхней части эллипса при  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$  и  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$  скорость падает до минимума

Если тело движется по окружности, то  $e = 0$ ,  $a = b = r$ ,  $p = r$  и  $v = \frac{2\pi r}{T}$

Если тело движется по параболе, то  $e = 1$ , а скорость изменяется от максимальной до нуля при  $\varphi = \pi$  (рис. 27.5)

$$v^2 = \frac{2C^2}{p}(1 + \cos \varphi)$$

При гиперболической траектории  $\varphi = \pi$ ,  $v \neq 0$ , так как  $e > 1$

## § 28. Движение частиц в кулоновском поле силы отталкивания. Рассеяние $\alpha$ -частиц

**28.1. Движение  $\alpha$ -частицы в поле неподвижного ядра атома.** Закон Кулона для взаимодействия двух точечных электрических зарядов, как известно, выражается формулой

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \text{ где } k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

Здесь  $\vec{F}_{12}$  — вектор силы, с которой заряд  $q_1$  действует на заряд  $q_2$ ,  $\vec{r}_{12}$  — радиус-вектор, проведенный от первой частицы ко второй. По математической структуре закон Кулона аналогичен закону всемирного тяготения Ньютона. Но в отличие от тяготения кулоновское взаимодействие может быть как взаимным притяжением, так и взаимным отталкиванием.

Ядра атомов, в которых сосредоточена почти вся масса атома, заряжены положительно. Величина заряда ядра атома равна  $Ze$ , где  $Z$  — атомный номер элемента,  $e$  — модуль элементарного электрического заряда (заряда электрона). Исследование строения атома производится путем зондирования его пучком быстро движущихся заряженных частиц. При взаимодействии частиц с ядром траектория последних искривляется, происходит явление *рассеяния* частиц. Опытами такого рода английский физик Резерфорд в 1911 г. установил ядерную модель строения атома.

Рассмотрим задачу об определении траектории  $\alpha$ -частицы, движущейся в поле ядра атома. В этой задаче получаются формулы Резерфорда для рассеяния  $\alpha$ -частиц, представляющих собой ядра гелия и имеющих заряд  $2e$ . Массу  $\alpha$ -частицы обозначим  $m$ . Ядро рассеивающего атома имеет заряд  $Ze$ . Его массу считаем большой и движением ядра пренебрегаем. Потенциальная энергия  $\alpha$ -частицы в поле ядра будет  $U = \frac{2kZe^2}{r}$ , и при любых начальных условиях полная механическая энергия  $\alpha$ -частицы положительна, т. е.  $E > 0$ . Траекторией движения в данном случае является гипербола, фокус которой совпадает с положением рассеивающего ядра.

На рисунке 28.1 изображена траектория движения  $\alpha$ -частицы и показаны ее элементы.  $\bar{AC}$  — асимптота гиперболы, совпадающая с направлением начальной скорости  $\alpha$ -частицы,  $DB$  — вторая асимп-