Для верхней части эллипса при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ скорость падает до минимума

Если тело движется по окружности, то $e = 0$, $a = b = r$, $p = r$ и $v = \frac{2\pi r}{T}$

Если тело движется по параболе, то $e = 1$, а скорость изменяется от максимальной до нуля при $\varphi = \pi$ (рис 27 5)

$$v^2 = \frac{2C^2}{p}(1 + \cos\varphi)$$

При гиперболической траектории $\varphi = \pi$, $v \neq 0$, так как $e > 1$

§ 28. Движение частиц в кулоновском поле силы отталкивания. Рассеяние α-частиц

28.1. Движение α-частицы в поле неподвижного ядра атома. Закон Кулона для взаимодействия двух точечных электрических зарядов, как известно, выражается формулой

$$\vec{F}_{1\,2} = k\frac{q_1 q_2}{r_{1\,2}^3}\vec{r}_{1\,2}, \text{ где } k = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

Здесь $\vec{F}_{1.2}$ — вектор силы, с которой заряд q_1 действует на заряд q_2, $\vec{r}_{1\,2}$ — радиус-вектор, проведенный от первой частицы ко второй. По математической структуре закон Кулона аналогичен закону всемирного тяготения Ньютона. Но в отличие от тяготения кулоновское взаимодействие может быть как взаимным притяжением, так и взаимным отталкиванием.

Ядра атомов, в которых сосредоточена почти вся масса атома, заряжены положительно. Величина заряда ядра атома равна Ze, где Z — атомный номер элемента, e — модуль элементарного электрического заряда (заряда электрона). Исследование строения атома производится путем зондирования его пучком быстро движущихся заряженных частиц. При взаимодействии частиц с ядром траектория последних искривляется, происходит явление *рассеяния* частиц. Опытами такого рода английский физик Резерфорд в 1911 г. установил ядерную модель строения атома.

Рассмотрим задачу об определении траектории α-частицы, движущейся в поле ядра атома. В этой задаче получаются формулы Резерфорда для рассеяния α-частиц, представляющих собой ядра гелия и имеющих заряд $2e$. Массу α-частицы обозначим m. Ядро рассеивающего атома имеет заряд Ze. Его массу считаем большой и движением ядра пренебрегаем. Потенциальная энергия α-частицы в поле ядра будет $U = \frac{2kZe^2}{r}$, и при любых начальных условиях полная механическая энергия α-частицы положительна, т. е. $E > 0$. Траекторией движения в данном случае является гипербола, фокус которой совпадает с положением рассеивающего ядра.

На рисунке 28.1 изображена траектория движения α-частицы и показаны ее элементы. AC — асимптота гиперболы, совпадающая с направлением начальной скорости α-частицы, DB — вторая асимп-

тота, определяющая направление скорости α-частицы после рассеяния. Рассеивающее ядро находится в правом фокусе F_1. Угол ϑ между асимптотами — угол рассеяния, a и b — вещественная и мнимая полуоси гиперболы, ε — расстояние от центра до фокуса гиперболы, связанное с полуосями гиперболы известным соотношением: $\varepsilon = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Расстояние от рассеивающего центра до асимптоты $F_1C = b$ есть наименьшее расстояние, на которое α-частица пролетела бы от ядра при отсутствии отталкивания. Это расстояние называется прицельным расстоянием. Фактически наименьшее расстояние, на котором частица пролетает от ядра, есть расстояние от вершины гиперболы E до фокуса F_1. Это расстояние обозначим через q, а через φ — угол между асимптотой и действительной осью гиперболы F_1F_2.

Установим связь между параметрами системы α-частица — ядро и углом расстояния ϑ. В итоге угол рассеяния должен быть выражен через массу и скорость частицы, ее заряд и заряд ядра, прицельное расстояние b, характеризующее взаимное положение ядра и налетающей частицы.

Запишем интеграл энергии и интеграл площадей. Обозначим через v начальную скорость α-частицы, когда она находится на «бесконечно большом» расстоянии от ядра; v_0 — ее скорость в вершине гиперболы. Тогда интеграл энергии выразится равенством

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{2kZe^2}{q}.$$

Соответственно интеграл площадей запишется так: $mvb = mv_0q$.

Из интегралов движения можно получить уравнение, связывающее прицельное расстояние b с углом отклонения ϑ, но предварительно надо найти связь между b и q. Заметим для этого, что прямоугольные треугольники BOE и OCE равны. Кроме того,

$$a = \varepsilon \cos\varphi,\ b = \varepsilon \sin\varphi,\ q = a + \varepsilon = (1 + \cos\varphi)\cdot\varepsilon.$$

Отсюда следует:

$$\frac{b}{q} = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}.$$

Интеграл площадей при использовании последнего равенства дает соотношение между скоростями:

$$\frac{v_0}{v} = \frac{b}{q} = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}.$$

Из интеграла энергии для отношения квадратов скоростей получаем выражение

$$\frac{v_0^2}{v^2} = 1 - \frac{2kZe^2}{q}\,\frac{2}{mv^2} = 1 - \frac{4kZe^2}{mv^2b}\,\frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}.$$

Возводя предыдущее равенство в квадрат и используя тригонометрическое тождество, имеем:

$$\frac{v_0^2}{v^2} = \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}.$$

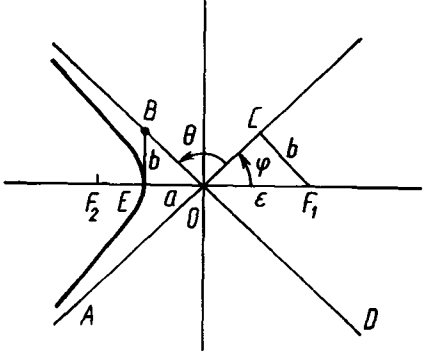

Рис. 28.1.

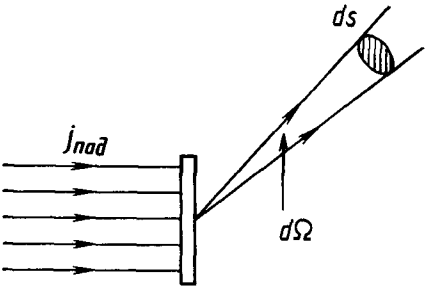

Рис 28.2

Сравнение двух последних равенств дает:

$$\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = 1 - \frac{4kZe^2}{mv^2b}\,\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

Простые преобразования приводят далее к равенству

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{mv^2}{2kZe^2}\,b.$$

Заменяя здесь угол φ через ϑ на основании очевидного соотношения

$$\varphi = 90^\circ - \frac{\vartheta}{2},$$

приходим к результату:

$$b = \frac{2kZe^2}{mv^2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}, \qquad (28.1)$$

дающему ответ на поставленную задачу.

Однако в случае микрочастиц проследить за движением отдельной мнкрочастицы во всех деталях не удается, так что соотношение (28.1) непосредственно, как это можно сделать в случае макроскопических тел, не применяется. Мы используем его для расчета других величин, характеризующих рассеяние.

28.2. Дифференциальное сечение рассеяния. На рассеивающий центр направляется параллельный пучок α-частиц, движущихся с одинаковой скоростью, и исследуется, каково число частиц, рассеянных под различными углами. Рассеяние характеризуется отношением числа частиц, рассеянных в данном элементе телесного угла Ω, к числу частиц, падающих на единичную площадку, перпендикулярную скорости падающих частиц, в единицу времени, т. е. плотности потока падающих частиц (рис. 28.2). Это отношение имеет размерность площади и называется *эффективным дифференциальным сечением рассеяния:*

$$d\sigma = \frac{dN}{j_{\text{пад}}} = \frac{j_{\text{рас}}}{j_{\text{пад}}}\,dS = \frac{j_{\text{рас}}r^2}{j_{\text{пад}}}\,d\Omega. \qquad (28.2)$$

Сечение рассеяния не зависит от плотности потока пучка падающих частиц и полностью определяется характером взаимодействия частиц с рассеивающим центром.

Задача о рассеянии ставится теперь следующим образом: по заданным параметрам рассеивающего центра и рассеиваемых частиц требуется определить зависимость дифференциального сечения рассеяния от угла рассеяния и этих параметров. Для конкретной задачи рассеяния α-частиц на ядрах атомов связь прицельного расстояния с углом рассеяния определена формулой (28.1). Чтобы угол рассеяния был заключен в промежутке от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, прицельное расстояние должно изменяться в пределах от b до $b - db$. Проведя через рассеивающий центр прямую BF, совпадающую с направлением скорости падающего пучка частиц, можем утверждать, что угол рассеяния будет находиться в заданных пределах, если частица проходит через круговое кольцо, в плоскости перпендикулярной скорости частиц, с центром на прямой BF и радиусами b и $b - db$ (рис. 28.3). Обозначая плотность потока частиц в падающем пучке j, для числа частиц, проходящих через кольцо, получим выражение $dN = -j2\pi b db$, отсюда:

$$d\sigma = \frac{dN}{j} = -2\pi b db = -2\pi b \frac{db}{d\vartheta} d\vartheta .$$

Остается еще выразить $d\vartheta$ через элемент телесного угла $d\Omega$, численно равного площади, вырезаемой на сфере единичного радиуса двумя конусами с углами раствора ϑ и $\vartheta + d\vartheta$. Как пояснено на рисунке 28.4, эта площадь $d\Omega = 2\pi \sin\vartheta d\vartheta$, откуда находим $d\vartheta$:

$$d\vartheta = \frac{d\Omega}{2\pi \sin\vartheta} .$$

Внося это значение $d\vartheta$ в числитель выражения для эффективного сечения, получаем выражение дифференциального сечения рассеяния:

$$d\sigma = -\frac{1}{\sin\vartheta} b \frac{db}{d\vartheta} d\Omega. \qquad (28.3)$$

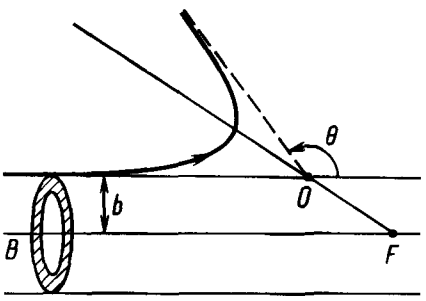

Рис. 28.3.

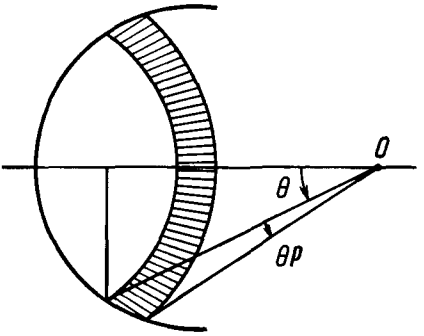

Рис. 28 4.

При рассеянии α-частиц зависимость прицельного расстояния от угла рассеяния дается формулой (28.1), и мы имеем:

$$\frac{db}{d\vartheta} = -\frac{2kZe^2}{mv^2}\frac{1}{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

Подставляя b и $\frac{db}{d\vartheta}$ в (28.3), получаем окончательное выражение для эффективного сечения рассеяния α-частиц:

$$d\sigma = \left(\frac{kZe^2}{mv^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}. \qquad (28.4)$$

Эта формула широко известна и применяется в атомной и ядерной физике под названием формулы Резерфорда. Формула подтверждается экспериментально, что говорит о правомерности применения классической механики к данному случаю рассеяиия. Однако это отнюдь не свидетельствует о применимости классической механики к микромиру вообще. Можно, например, решить задачу о движении электрона в кулоновском поле притяжения к ядру. При этом придем к результатам, вполне аналогичным полученным для движения планет в поле гравитационного притяжения Солнца. Электрон будет двигаться по эллипсу, в параметры которого вместо G войдет константа k (см. § 28). Но такие выводы, как будет показано далее, в части IV курса,—в резком противоречии с опытом. В микромире классическая механика имеет весьма ограниченное применение и заменяется квантовой механикой.

Пример 28.1. **Оценка размеров ядра атома.**

С помощью формулы Резерфорда проверяется предположение о точечности ядра атома. В опытах находнтся зависимость от угла рассеяния величины

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = f(\Omega).$$

Еслн она согласуется с теоретической, т. е.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{kZe^2}{mv^2}\right)\frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}},$$

то это и свидетельствует о малых размерах ядра.

Пример 28.2. **Измерение заряда ядра.**

С помощью формулы Резерфорда измеряется заряд ядер. Для двух химических элемеитов при рассеянии под одним и тем же углом ϑ имеем:

$$\frac{d\sigma_1}{d\sigma_2} = \frac{Z_1^2}{Z_2^2}.$$

Измеряя сечения рассеяния для ядра с известным зарядом и для ядра с неизвестным зарядом, рассчитываем неизвестный заряд по даиной формуле. Это один из наиболее прямых способов измерения заряда ядра.