Изучаемые в классической механике взаимодействия макроскопических тел, если они моделируются материальными точками, приводят к единственному результату — ускоренному движению. Динамические уравнения движения и их решения составляют поэтому главное содержание классической механики материальной точки и системы точек. *В релятивистской области* основное уравнение динамики $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ получает релятивистское обобщение, однако область практических применений уравнения сравнительно узка: в окружающем нас ближайшем мире макроскопические тела не движутся с релятивистскими скоростями, а релятивистское движение микрочастиц во многих случаях не описывается в рамках релятивистского уравнения динамики потому, что микрочастицы не движутся по определенным траекториям, не имеют определенных скоростей, а также претерпевают взаимные превращения, исчезают одни и возникают другие частицы. Лишь в частных случаях движения в так называемой *квазирелятивистской области,* например движения заряженных частиц в макроскопическом электромагнитном поле, релятивистское дифференциальное уравнение движения и изученная выше схема описания движения дают исчерпывающий результат: по заданной силе находится кинематическое уравнение. Описание же явлений, происходящих в системе с помощью законов сохранения универсальных динамических величин — энергии, импульса, момента импульса,— возможно в самом общем релятивистском случае взаимодействия. По этой причине для релятивистского движения особо важное значение приобретают динамические величины и законы их сохранения.

§ 4. Энергия, импульс и момент импульса свободной изолированной частицы и системы частиц

4.1. Обсуждение метода получения динамических соотношений в СТО. Выше рассматривались изменения, вносимые СТО в кинематические понятия координаты, времени механического события, скорости движения материальной точки. Определенные изменения постулаты Эйнштейна и преобразования Лоренца должны вызвать и в динамике. Это видно из следующих наглядных рассуждений. Основное уравнение динамики $\vec{F} = m\vec{a}$ при постоянной силе приводит к постоянному ускорению и к равноускоренному движению материальной точки со скоростью $v = v_0 + at$, которая может стать по истечении определенного времени больше световой, что противоречит предельному характеру скорости света. Следовательно, в релятивистской области основное уравнение классической механики несправедливо. Не всегда будет выполняться и третий закон Ньютона, так как появился новый физический объект — поле. Взаимодействие происходит между материальной точкой и полем, причем на точку со стороны поля действует сила, а силы противодействия нет, так как сила может действовать только на тела.

Рассмотренные примеры показывают, что динамические законы и величины в релятивистской механике отличаются от классических. Для установления их используем важный для современной физики *методологический прием:* будем отыскивать *инвариантные* по отношению к преобразованиям Лоренца соотношения, ибо верные соотношения должны быть лоренц-инвариантными в силу принципа относительности Эйнштейна. В классической механике изучен метод описания движения Лагранжа, уравнения Лагранжа. Замечательной особенностью уравнений Лагранжа является их инвариантность по отношению к любому (непрерывному, однозначному) преобразованию координат, в том числе и преобразованиям Лоренца. Поэтому метод Лагранжа удобен в рассматриваемом случае релятивистского движения. Для применения этого метода необходимо составить функцию Лагранжа, которая заведомо была бы *инвариантом преобразований Лоренца.* Тогда получаемые с ее помощью дифференциальные уравнения движения будут иметь инвариантную форму.

В классической механике все динамические величины — импульс, момент импульса, энергия — были введены в связи с преобразованиями основного уравнения динамики. В релятивистской механике избирается иной путь. С помощью уравнений Лагранжа установлено, что сохранение обобщенной энергии и обобщенного импульса системы материальных точек есть следствие однородности времени и пространства, а сохранение момента импульса — изотропности пространства. Названные фундаментальные свойства пространства переносятся в СТО, поэтому мы *определим энергию, импульс и момент импульса в СТО как сохраняющиеся в силу свойств симметрии пространства-времени величины,* опираясь на метод Лагранжа.

4.2. Энергия и импульс свободной частицы. Рассмотрим свободную от связей и изолированную от внешних полей частицу. (Так как механические связи в релятивистской динамике не рассматривают, терминологию часто упрощают и называют *свободную изолированную* частицу просто *свободной* частицей.) Найдем для нее функцию Лагранжа.

Принцип экстремального действия распространяется на релятивистскую механику при условии, что действие

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k \dot{q}_k t)\, dt \tag{4.1}$$

является инвариантом преобразований Лоренца. Перейдем от неинвариантного dt к инвариантному собственному времени точки по формуле (2.11):

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

В таком случае подынтегральное выражение $L(q_k \dot{q}_k t)\, dt$ примет вид:

$$L(q_k \dot{q}_k t)\, dt = L'(q_k \dot{q}_k t)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{4.2}$$

и будет инвариантом, если $L'(q_k\dot{q}_k t)$ — инвариант преобразований Лоренца.

В качестве обобщенных координат выберем декартовы координаты точки x, y, z, тогда обобщенными скоростями будут $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$. В силу однородности пространства и времени L' не может *явно* зависеть от координат и времени. А в силу изотропности пространства скорость может входить в L' только по модулю, причем в степени не выше второй (см. I, пример 24.1). Инвариант, содержащий скорость, нам известен, это $v_\alpha v_\alpha$. Кроме того, в L' должна входить инвариантная масса частицы, *измеренная в системе, где частица покоится.* На основании высказанных соображений запишем:

$$L' = mv_\alpha v_\alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (4.3)$$

Используя функцию Лангранжа (4.3), находим составляющие обобщенного импульса релятивистской частицы (формула (I, 22.7)):

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}\left(-mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{mv_k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (4.4)$$

$k = 1, 2, 3.$

Полученная величина и играет роль, аналогичную импульсу в классической механике. Она называется *релятивистским импульсом.* В обычных векторных обозначениях релятивистский импульс имеет вид:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (4.5)$$

Обобщенную энергию частицы вычислим, используя определение функции Гамильтона (I, 22.2):

$$H = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L,$$

откуда

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Обобщенная энергия в данном случае называется *релятивистской энергией* свободной частицы и обозначается буквой E:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (4.6)$$

Для системы свободных невзаимодействующих между собой частиц функция Лагранжа записывается как сумма одночастичных

функций, что вытекает из увеличения степеней свободы и соответствующих им обобщенных координат:

$$L = -\sum_{i=1}^{n} m_i c^2 \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}. \tag{4.7}$$

Независимость функций Лагранжа от времени, обусловленная однородностью времени, приводит, как это показано в § 22 части I, к сохранению релятивистской энергии системы невзаимодействующих частиц:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \text{const}. \tag{4.8}$$

Однородность пространства приводит к сохранению релятивистского импульса системы:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \text{const}. \tag{4.9}$$

Выводы о сохранении сумм (4.8) и (4.9) для системы невзаимодействующих частиц тривиальны, так как сохраняются отдельные слагаемые — энергии и импульсы свободных частиц. Однако смысл их для нас заключается в другом: выводя законы сохранения, мы нашли в релятивистской области новые сохраняющиеся величины — релятивистскую энергию и релятивистский импульс, отличающиеся от классических.

Пример 4.1. **Нахождение связи между релятивистским и классическим импульсами.**

Связь релятивистского и классического импульсов устанавливается путем предельного перехода к классической области: либо $v \to 0$, либо $c \to \infty$, откуда

$$\lim_{c \to \infty} \vec{p} = m\vec{v} = \vec{p}_{\text{кл}}.$$

Пример 4.2. **Нахождение связи между релятивистской энергией и кинетической энергией материальной точки.**

Устанавливаем искомую связь с помощью разложения энергии (4.6) в ряд по формуле бинома, где ограничиваемся членом с малым сомножителем $\frac{v^2}{c^2}$: $E = mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}$.

Слагаемое mc^2 называется *энергией покоя*, которая в классической области не проявляется, так как не изменяется в процессе взаимодействий.

Пример 4.3. **Нахождение связи релятивистской функции Лагранжа с классической.**

Аналогично примеру 4.2 устанавливается:

$$-mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{mv^2}{2} - mc^2.$$

Слагаемое mc^2 может рассматриваться в этом случае как потенциальная энергия, однако как любая константа, прибавляемая к функции Лагранжа, влияния на динамические уравнения движения не оказывает.

4.3*. Момент импульса. В § 22 части I показано, что в силу изотропности пространства для замкнутой изолированной системы, описываемой лагранжианом L, сохраняется во времени величина:

$$\sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i \operatorname{grad}_{\vec{v}_i} L] = \text{const},$$

где $\operatorname{grad}_{\vec{v}_i} L = \vec{i}\frac{\partial L}{\partial v_x} + \vec{j}\frac{\partial L}{\partial v_y} + \vec{k}\frac{\partial L}{\partial v_z} = \vec{p}_i$

— вектор импульса свободной частицы.

Для релятивистской системы невзаимодействующих частиц функция Лангранжа должна быть известна; она выражается формулой (4.7). Расчет приводит для $\vec{p}_i$ к выражению релятивистского импульса. В результате сохраняется величина:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \frac{m\vec{v}_i}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}}\right] = \text{const}.$$

Таким образом, изотропность пространства позволяет ввести *релятивистский момент импульса частицы:*

$$\vec{L} = \left[\vec{r} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] \tag{4.10}$$

и момент импульса системы — *сумму моментов частиц.* Момент импульса свободных частиц сохраняется во времени.

При переходе от одной инерциальной системы к другой проекции вектора момента импульса преобразуются с помощью матрицы Лоренца (3.3) как составляющие тензора второго ранга:

$$L_{ik} = x_i p_k - x_k p_i \tag{4.11}$$

с индексами $i, k = 1, 2, 3$.

Это видно из сравнения соответствующих составляющих формулы (4.11) и проекций векторного произведения (4.10):

$$L_{23} = x_2 p_3 - x_3 p_2 = y p_z - z p_y = L_x,$$
$$L_{31} = x_3 p_1 - x_1 p_3 = z p_x - x p_z = L_y,$$
$$L_{12} = x_1 p_2 - x_2 p_1 = x p_y - y p_x = L_z.$$

4.4. Четырехмерный вектор энергии-импульса свободной частицы. Формула Эйнштейна. Релятивистская энергия и релятивистский импульс объединяются преобразованиями Лоренца в единую величину — 4-вектор энергии-импульса. Чтобы показать это, образуем 4-вектор преобразований Лоренца по способу, указанному в § 3: умножим 4-скорость на скаляр m и назовем полученный вектор *4-импульсом:* $p_\alpha = m v_\alpha$.

С учетом формулы (3.7), выделяя временную часть (она отве-

чает индексу 0 временного измерения), можно записать:

$$p_0 = \frac{imc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.12}$$

Пространственная часть 4-вектора p_α — вектор $\vec{p}$ — совпадает с релятивистским импульсом.

Временная часть p_0 (4.13) связана со второй сохраняющейся для свободной частицы величиной — релятивистской энергией (4.6). Легко устанавливаем, что

$$p_0 = \frac{iE}{c}. \tag{4.13}$$

Запишем 4-импульс, вводя в его выражение энергию:

$$p_0 = \frac{iE}{c}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.14}$$

Определения релятивистского импульса (4.8) и релятивистской энергии (4.6) обретают физический смысл в процессе измерений. В макроскопической области кинематическими средствами измеряется скорость, по взаимодействию — масса, так что формулы для энергии и импульса (4.5) и (4.6) применяются и проверяются непосредственно. Величины энергия и импульс представляют собой универсальные характеристики тел и микрочастиц в свободном состоянии во всей изученной пространственно-временной области, в том числе и в микромире. Измерение их, помимо кинематического метода, возможно на основе законов сохранения, а также друг через друга, потому что имеется универсальная связь между энергией и импульсом.

Для получения этой связи воспользуемся формулами (4.14) и образуем скалярный квадрат 4-импульса: $-\frac{E^2}{c^2} + p^2 = -m^2c^2$, откуда

$$E = \pm c\sqrt{p^2 + m^2c^2}.$$

В настоящее время известны лишь тела и частицы с $m^2 \geqslant 0$, а объекты, где $m^2 < 0$, не обнаружены. Не обнаружены и объекты с отрицательной энергией (массой), так что приходим к *формуле связи энергии и импульса:*

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{4.15}$$

Общая формула (4.15) часто называется формулой Эйнштейна. Она в частном случае $m = 0$ дает формулу

$$E = cp, \tag{4.16}$$

применяемую для частиц без массы покоя.

Если $p \gg mc$, то для таких предельно релятивистских частиц также справедлива, но приближенно формула (4.16).

Если $v = 0$, то

$$E_0 = mc^2 \tag{4.17}$$

—*энергия покоя* частицы. Это инвариант преобразований Лоренца.

С телами, если у них $m \neq 0$, может быть связана система отсчета, в которой частицы обладают только энергией покоя. Но имеются и объекты без массы покоя, соответственно с ними нельзя связать систему отсчета, так как в последней они просто не существуют, $m = 0$, $\vec{p} = 0$, $E = 0$. К объектам первого рода принадлежат макроскопические физические тела и большинство элементарных частиц. Объекты второго рода представлены прежде всего квантами электромагнитного поля — фотонами — и, возможно, гравитонами, нейтрино. Эти частицы существуют, лишь двигаясь со скоростью c.

Формула (4.16) выполняется для энергии и импульса макроскопического электромагнитного поля, распределенных в некоторой области пространства. При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой 4-вектор энергии-импульса преобразуется в соответствии с общей формулой преобразования 4-векторов (3.4):

$$p'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\alpha\beta} p_\beta.$$

Это значит, что релятивистская энергия и составляющие релятивистского импульса преобразуются друг через друга, совместно.

Пример 4.4. **Преобразование энергии и импульса.**

Пусть в штрихованной системе покоится частица с массой m. Четырехмерный вектор энергии-импульса здесь имеет проекции $p'_0 = imc$, $p'_1 = 0$, $p'_2 = 0$, $p'_3 = 0$. С помощью формул (3.4) и матрицы (3.3) имеем:

$$p_0 = \frac{imc}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_1 = \frac{mV}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0,$$

откуда энергия частицы в нештрихованной системе выражается формулой

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Имеет место и составляющая релятивистского импульса p_x.

4.5. Классическая и релятивистская области. Масса покоя и релятивистская масса. Формула (4.6) дает критерий для разграничения взаимодействий в классической и релятивистской областях. Если $v \ll c$, то выражение для энергии разлагаем по степеням малой величины $\left(\frac{v}{c}\right)^2$; ограничиваясь первым слагаемым, получаем:

$$E = mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \tag{4.18}$$

Полная энергия материальной точки складывается из энергии покоя, пропорциональной массе m, и кинетической энергии $T = \frac{mv^2}{2}$. Важно, что $\frac{mv^2}{2} \ll mc^2$, поэтому в классической области изменения энергии при взаимодействии малы по сравнению с энергией покоя и масса сохраняется. Однако в релятивистской области кинетическая энергия может быть сравнима с энергией покоя, а может и превышать ее в любое число раз. В таком случае закон сохранения энергии не будет препятствовать образованию новых частиц с переходом энергии движения в энергию покоя. *Опыт показывает*, что в релятивистской области при взаимодействиях элементарных частиц масса их не сохраняется. Это означает, что энергия покоя может переходить в энергию движения и наоборот.

Иногда вводят *движущуюся*, или *релятивистскую массу*, придавая релятивистскому импульсу (4.5) классический вид: $p = mv$. Для этого определяют релятивистскую массу соотношением

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.19}$$

С введением релятивистской массы m_r (ранее введенная масса m именуется *массой покоя*) зависимость между энергией и массой (4.6) и (4.17) для движущегося и покоящегося объектов становится единой: $E = m_r c^2$.

Релятивистская масса зависит от скорости и не является инвариантной величиной, что делает ее применение ограниченным, особенно для элементарных частиц, где масса покоя является одним из важнейших параметров частицы.

Итак, в классической области кинетическая энергия (приближенно) выражается формулой

$$T = \frac{p^2}{2m},$$

в релятивистской:

$$T = E - mc^2 = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} - mc^2.$$

В предельно релятивистской $T \approx E \approx cp$, причем связь ее с релятивистским импульсом определяется формулой, справедливой и для безмассовых частиц. По этой причине об энергии квантов электромагнитного поля говорят иногда как о кинетической энергии.

§ 5. Законы сохранения в системе взаимодействующих частиц

5.1. Релятивистская модель взаимодействия. Понятие о поле. В классической механике взаимодействие между материальными точками понимается как дальнодействие: система состоит только из тел, моделируемых материальными точками, и действие тел друг на друга осуществляется на расстоянии, передаваясь мгновенно.