Из (2) следует, что $v = \text{const}$, $\vec{v} = v\vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной к траектории. Подставляя это выражение для скорости в (1), имеем:

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\vec{\tau}}{dt} = qv[\vec{\tau}\vec{B}]. \tag{3}$$

Далее,

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$

Из геометрии известно, что

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{n},$$

где R — радиус кривизны траектории, а $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к ней. Поэтому вместо (3) получаем:

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v}{R}\vec{n} = qvB\sin(\vec{\tau}\hat{\ }\vec{B})\vec{n},$$

или окончательную формулу:

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v}{R} = qB\sin(\vec{\tau}\hat{\ }\vec{B}). \tag{4}$$

Для того чтобы равенство (4) выполнялось, необходимо сохранение величины угла между вектором $\vec{B}$ и касательной к траектории и постоянство кривизны траектории. Таким образом, траекторией будет винтовая линия, ось которой совпадает с направлением магнитного поля.

Важен случай, при котором частица начинает движение перпендикулярно полю. Тогда траекторией служит окружность с радиусом

$$R = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v}{qB}. \tag{5}$$

Релятивистские эффекты описаны в формуле (5) корнем в знаменателе.

На практике широко применяются «скрещенные» электрические и магнитные поля: в них электрическое поле ускоряет частицы; а магнитное — направляет их (ускорители элементарных частиц).

§ 7. Неинерциальные системы и гравитационное поле в теории относительности

7.1. Гравитационное поле в классической механике. Фундаментальное макроскопическое поле природы (гравитационное) в классической механике описывается законом всемирного тяготения

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}, \tag{7.1}$$

где гравитационная постоянная $g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²·кг⁻². Такая сила действует на материальную точку массой m в поле, созданном другой точкой с массой M, помещенной в начале координат. Поле стационарное центрально-симметричное и потенциальное. В примере (1, 11.3) было показано, что потенциальная энергия частицы в поле в этом случае определяется формулой

$$U = -G\frac{mM}{r} = -\gamma\frac{m}{r}, \tag{7.2}$$

где $\gamma = GM$.

Необходимо помнить, что в приведенных формулах m и M — гравитационные массы, или гравитационные заряды тел, характеризующие не инерциальные свойства этих тел, а способность создавать гравитационное поле и испытывать действие силы в нем.

Потенциал точки поля определяется формулой

$$\varphi = \frac{U}{m}. \tag{7.3}$$

Для рассмотренного поля точечной гравитационной массы потенциал легко вычислить с помощью (7.2):

$$\varphi = -G\frac{M}{r} = -\frac{\gamma}{r}. \tag{7.4}$$

Так как в классической механике справедлив принцип суперпозиции сил (I, § 5.3), то он имеет место и для потенциала гравитационного поля. Если поле создано системой материальных точек с массами m_i, то потенциал его находится по формуле

$$\varphi = -G\sum_i \frac{m_i}{r'_i}, \tag{7.5}$$

где $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{0i}$ — расстояния от гравитирующих масс до точки наблюдения.

Нетрудно записать формулу потенциала и для случая непрерывного распределения гравитационной массы по пространству.

Пусть известна плотность ее $\rho = \frac{dm}{dV}$, в таком случае

$$\varphi = -G\int_V \rho\frac{dV}{r'}. \tag{7.6}$$

Зная потенциалы точки поля, можно не только определить потенциальную энергию тела по формуле (7.3), помещенного в поле, но и найти силу, действующую на тело. Учитывая формулу (I, 11.4), имеем:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U = -m \operatorname{grad} \varphi. \tag{7.7}$$

Из этой формулы видна целесообразность введения нового понятия — напряженности гравитационного поля:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{7.8}$$

Как видно, это есть отношение силы, действующей в поле на точечную массу, к величине массы. Сравнивая (7.7) и (7.8), получаем: $\vec{g} = -\operatorname{grad} \varphi$.

Теперь можно понять, в чем заключается общий подход к описанию поля: с помощью (7.5) или (7.6), а также дифференциального уравнения для потенциала, эквивалентного (7.6)

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho, \tag{7.9}$$

находят потенциалы поля как функцию координат точки пространства, а по нему — напряженность поля и силу, действующую на тело, находящееся в поле.

Важнейшей особенностью гравитационного поля является то, что создающая его гравитационная масса пропорциональна, а при выборе единиц в системе СИ равна инертной массе (см. § 8.3). По этой причине все тела в некоторой точке поля движутся с одним и тем же ускорением:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{g}. \tag{7.10}$$

Ускорение тела не зависит от массы тела, а определяется только напряженностью поля в данной точке пространства.

Данная закономерность для гравитационного поля позволяет установить аналогию между движением тел в поле и движением тел в отсутствие сил, но в неинерциальной системе отсчета.

Вернемся к первой части книги, к § 8.1. Силы инерции, определяемые формулами (8.4) и (8.5) (переносная и кориолисова), так же как и гравитационные, пропорциональны массе тела. Поэтому ускорение тела в неинерциальной системе не зависит от его массы, а определяется характером движения системы, положением и скоростью тела в ней.

В этой связи говорят об *эквивалентности неинерциальной системы некоторому гравитационному полю*. Например, рассмотрим систему K', поступательно движущуюся в системе K с постоянным ускорением $\vec{a}_n$. Согласно (I, 8.4) на тело в системе K' действует сила инерции $\vec{I}_n = -m\vec{a}_n$, эквивалентная гравитационной силе в поле с напряженностью

$$\vec{g} = -\vec{a}_n. \tag{7.11}$$

С точки зрения вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ системы K', где на тело согласно (I, 8.11) действуют силы инерции $\vec{I}_n + \vec{I}_k = -m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] - 2m[\vec{\omega}\,\vec{v}']$, эти силы можно заменить гравитационным полем с напряженностью

$$\vec{g} = -[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] - 2[\vec{\omega}\,\vec{v}']. \tag{7.12}$$

Однако эквивалентность неинерциальной системы и гравитационного поля неполная. Только в небольшой области пространства, где поле можно считать однородным, можно ввести неинерциальную систему, исключающую поле. Для этого достаточно взять систему с $\vec{a}_n = -\vec{g}$. Во всем пространстве такая замена невозможна. Например, во вращающейся системе в соответствии с (7.12) силы инерции неограниченно растут с ростом r'. Но такое поле не существует при любом распределении создающих его масс.

7.2. Подход к гравитационному полю в теории относительности. В СТО, как это описано в § 1, действует принцип относительности, устанавливающий полное физическое равноправие инерциальных систем отсчета и ковариантность уравнений, выражающих основные законы природы по отношению к преобразованиям Лоренца — переходу от одной ИСО к другой. Но гравитационному полю эквивалентна неинерциальная система отсчета. Поэтому включение в теорию относительности гравитационных полей требует расширения круга применяемых систем, включения в рассмотрение неинерциальных систем отсчета. Это и сделано в общей теории относительности (ОТО). Окончательную формулировку ее А. Эйнштейн выполнил к 1916 году. *Общая теория относительности есть теория пространства, времени и тяготения.*

Физическим основанием для построения ОТО послужил одинаковый характер проявления сил инерции, обусловленных неинерциальным движением системы координат и сил тяготения. Поэтому ОТО оперирует с произвольно движущимися системами отсчета. Но в таком случае преобразования координат при переходе от одной системы к другой оказываются более сложными, нежели изученные нами ранее преобразования Лоренца. В общем случае переход от системы K к системе K' выражается формулами

$$x'_\alpha = f_\alpha(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3), \tag{7.13}$$

где f_α — некоторые однозначные непрерывные функции, x_0 — временная, а x_1, x_2, x_3 — три пространственные координаты точки, криволинейные.

В инерциальных системах любой закон природы выражается уравнениями одной и той же формы, т. е. уравнения лоренц-ковариантны. Идея ковариантности уравнений движения тела в гравитационном поле и уравнений самого поля при общих преобразованиях (7.13) в ОТО также является ведущей.

Геометрические свойства пространства-времени в инерциальных системах отсчета, так называемая *метрика* пространства, с большой полнотой отражены в форме пространственно-временного интервала (2.5): $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. В случае неинерциальных систем отсчета метрика пространства-времени изменяется, т. е. интервал не сводится к (7.13), а выражается более общей формулой:

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\ \beta} g_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta. \tag{7.14}$$

Здесь $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$ — некоторые функции координат точки пространства и момента времени.

Придавая индексам α, β значения 0, 1, 2, 3, получим матрицу величин

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \tag{7.15}$$

Совокупность данных шестнадцати величин $g_{\alpha\beta}$ в математике называется метрическим тензором. Этот тензор симметричен, т. е. $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, следовательно, в общем случае различны четыре элемента на главной диагонали в матрице (7.15), а остальные двенадцать попарно равны. Всего различных элементов десять.

С помощью (7.14) можно выразить интервал и в инерциальных системах, если взять метрический тензор:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.16}$$

Такой его вид соответствует декартовой прямоугольной системе координат. (Заметим, что теперь необходимость в использовании мнимой единицы у временной координаты отпадает, так как минус в интервал вносится элементом g_{00}.)

Для понимания подхода к гравитационному полю в ОТО очень важно учесть, что в неинерциальных системах отсчета никаким преобразованием координат (7.13) метрический тензор (7.15) свести к виду (7.16) невозможно. Неинерциальный характер системы выражается в том, что в матрице есть элементы $g_{\alpha\beta}$, отличные от нуля и единицы и являющиеся функциями координат и времени.

Опираясь далее на принцип эквивалентности, заключаем, что при наличии гравитационного поля метрический тензор также несводим к виду (7.16), а гравитационное поле учтено в нем зависимостью

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x_0, x_1, x_2, x_3). \tag{7.17}$$

Итак, гравитационное поле в ОТО сводится к метрике пространства-времени. Пространство-время при наличии поля не является «плоским», или галилеевым, с метрическим тензором (7.16), а оказывается «кривым», или римановым, с тензором (7.15).

Исходная аксиома ОТО состоит в следующем утверждении: *при наличии гравитационного поля метрика пространства задается формулой* (7.14), *а поле характеризуется элементами тензора* (7.15).

Знание функций (7.17) позволяет определить все параметры поля, решить все задачи о движении тел в поле; поэтому основными в теории являются уравнения для нахождения $g_{\alpha\beta}$. Они связывают величины $g_{\alpha\beta}$ с распределением и движением материи в пространстве. Таким образом, с одной стороны, гравитация сводится к геометрическим свойствам пространства, а с другой — геометрические свойства пространства определяются физическими явлениями и материальными объектами.

При первоначальном знакомстве с ОТО мы вынуждены ограничиться разъяснением на простых примерах того, как поле задается через метрический тензор. Перед вопросом об уравнениях поля придется остановиться. (Об уравнениях поля см.: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М., 1948.— Гл. XI.)

В качестве примера рассмотрим интервал с точки зрения двух систем: инерциальной K' и вращающейся в ней неинерциальной K. В инерциальной системе K' выберем цилиндрические координаты $x_1 = r'$, $x_2 = z'$, $x_0 = \varphi'$ и временную $x_0 = ct'$. В таком случае имеем:

$$ds^2 = -c^2dt'^2 + dr'^2 + r'^2d\varphi'^2 + dz'^2. \tag{7.18}$$

Метрический тензор для (7.15) имеет вид:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.19}$$

Неинерциальная система K вращается вокруг оси цилиндрической системы K'

с угловой скоростью ω. Сохраняя прежнюю временную координату, имеем формулы перехода:

$$ct' = ct,\ r' = r,\ \varphi' = \varphi + \omega t,\ z' = z. \tag{7.20}$$

Теперь можно записать интервал (7.18) в этой системе:

$$ds^2 = -(c^2-\omega^2 r^2)dt^2 + 2\omega r^2 dydt + dr^2 + r^2 d\varphi + dz^2. \tag{7.21}$$

Развернем выражение (7.14):

$$ds^2 = g_{00}dx_0^2 + 2g_{02}dx_0dx_2 + g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + \ldots$$

и сравним с (7.21). Отсюда и находятся элементы метрического тензора:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) & 0 & \dfrac{\omega r^2}{c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\omega r^2}{c} & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.22}$$

Из примера видно, что значат в конкретном случае формулы (7.13), каково отличие метрического тензора для неинерциальных систем от инерциальных. Если (7.19) переходом к декартовой системе приведется к (7.16), то (7.22) никакими преобразованиями, сохраняющими указанное вращение K в K', к виду (7.16) не привести. Зависимость координат от времени при вращении системы непременно даст отличные от единиц множители при дифференциалах в интервале (7.21), а вместе с тем и новые элементы тензора.

7.3. Собственное время и расстояния между точками. Так как в ОТО в общем случае применяются криволинейные координаты и произвольные преобразования координат, то теоретически выбор координат очень широк. В качестве пространственных координат x_1, x_2, x_3 могут фигурировать различные величины, однозначно определяющие положение точки в системе отсчета. Что касается времени t, входящего во временную координату $x_0 = ct$, то благодаря возможности произвольного преобразования (7.13) время можно определить в каждой точке пространства по произвольно идущим часам. В такой общей постановке вопроса измерение пространственных координат и времен событий ограничено лишь требованием непрерывности четырехмерного континуума — множества точек (x_0, x_1, x_2, x_3).

Но такая свобода в использовании координат носит скорее математический, а не физический характер: в конкретных измерениях и расчетах использование одних координат может оказаться предпочтительнее либо из соображений простоты, либо потому, что они высвечивают физическое содержание результатов. Так, заключение о продолжительности процессов можно получить, если возможно введение *единого времени* в системе. В свою очередь отделить гравитационное поле от проявлений сил инерции, являющихся результатом выбора неинерциальной системы, можно, используя так называемые гармонические координаты.

При использовании любых систем отсчета необходимо определять промежутки истинного времени между двумя событиями в одной и той же точке пространства по произвольно идущим часам системы и расстояния между двумя точками (длины некоторых отрезков) по координатам их концов. Как и в СТО, в ОТО вводится понятие *собственного, или истинного,* времени в данной точке пространства. Для его измерения каждая точка снабжается физически эквивалентными часами. Время, измеренное по таким часам, и есть собственное время в данной точке. Обозначая бесконечно малый промежуток собственного времени через $d\tau$, имеем формулу, определяющую собственное время как инвариант преобразований координат, аналогичную (2.9): $c^2 d\tau^2 = -ds^2$.

Далее, для установления связи собственного времени со временем системы x_0 следует выразить ds^2 по (7.14) с учетом того, что интервал берется между двумя событиями в одной и той же точке пространства.

Окончательно получаем:

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\, dx_0. \tag{7.23}$$

Для конечных промежутков времени $\tau = \frac{1}{c}\int\sqrt{-g_{00}}\,dx_0$.

Если g_{00} зависит от координат x_1, x_2, x_3, то собственное время в разных точках пространства течет по-разному, если же g_{00} зависит и от временной координаты x_0, то изменяется и темп собственного времени в данной точке пространства. Сравнить собственное время в разных точках системы можно при условии, если x_0 — единое время системы. (Оно называется также мировым.) Единое время можно установить в случае, если поле постоянно и в удаленных точках отсутствует: $x_0 = ct$, где t определяется по часам удаленных точек. В такой системе временные отметки-сигналы можно послать в любую точку, так как расстояния в ней измеримы и неизменны.

Обратимся теперь к измерению расстояния между двумя точками. В СТО мы говорили об измерении длин неподвижных отрезков путем наложения на них жесткого масштаба (§ 2.1). Существует и другой метод измерения расстояний, также широко применяемый на практике. Это локационный метод, основанный на постоянстве скорости света или любой другой электромагнитной волны.

Пусть свет из точки $B\,(x_\alpha + dx_\alpha)$ направлен в точку $A\,(x_\alpha)$, а затем отражен в точку B, причем в точке B прошло время $d\tau$. Тогда расстояние между точками B и A определяется соотношением

$$dl = c\,\frac{d\tau}{2}. \tag{7.24}$$

С помощью (7.24) можно установить формулу, выражающую расстояние через координаты точек, между которыми оно измерено, если метрика пространства задана. Сделаем это сначала для инерциальных систем с метрикой (7.16). Светоподобный интервал между событиями — отправка светового сигнала из точки B и приход его в точку A — равен нулю: $-dx_0^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$. Отсюда $dx_0 = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

Для определения времени $d\tau$, прошедшего в точке B между отправкой и возвращением сигнала, запишем и сравним между собой временные координаты отправки и возвращения: отправка $x_0 - |dx_0|$, возвращение $x_0 + |dx_0|$, изменение $2|dx_0|$. Отсюда с учетом значения $g_{00} = -1$ формула (7.23) дает: $d\tau = \frac{2|dx_0|}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Подставляя это значение собственного времени в формулу, определяющую расстояние между двумя точками, имеем:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{7.25}$$

— результат, очевидный с точки зрения евклидовой геометрии, действующей в трехмерном пространстве.

Повторим рассуждения для общего случая неинерциальной системы с гравитационным полем, метрика пространства в которой задана формулой (7.14). Запишем интервал:

$$g_{00}dx_0^2 + 2g_{i0}dx_0dx_i + g_{ik}dx_idx_k = 0. \tag{7.26}$$

Здесь и далее для упрощения записей знак суммы опускаем. Если сомножители имеют повторяющийся индекс, то по нему ведется суммирование. Напомним также, что греческий индекс принимает четыре значения: 0, 1, 2, 3, а латинский — три: 1, 2, 3.

Из (7.26) следует:

$$dx_0 = \frac{1}{g_{00}}\left[g_{0i}dx_i \pm \sqrt{(g_{0i}g_{0k} - g_{ik}g_{00})\,dx_idx_k}\,\right]. \tag{7.27}$$

Переходя к собственному времени с помощью (7.23), получаем:

$$d\tau = \frac{2}{c\sqrt{-g_{00}}}\sqrt{(g_{0i}g_{0k} - g_{ik}g_{00})\,dx_idx_k}\,. \tag{7.28}$$

Осталось подставить (7.28) в (7.24), и искомая формула выведена:

$$dl = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\sqrt{(g_{0i}g_{0k} - g_{ik}g_{00})\,dx_idx_k}\,. \tag{7.29}$$

Целесообразно с помощью (7.29) ввести метрический тензор для трехмерной пространственной части четырехмерного пространства. Возводя (7.29) почленно в квадрат, имеем:

$$dl^2 = \left(g_{ik} - \frac{g_{i0}g_{k0}}{g_{00}}\right) dx_i dx_k. \tag{7.30}$$

Известно, что (7.30) выражает пространственный интервал — расстояние в соответствии с общей формулой римановой геометрии (7.14). Роль метрического тензора, который можно назвать пространственным, в ней играет величина

$$\gamma_{ik} = g_{ik} - \frac{g_{i0}g_{k0}}{g_{00}}. \tag{7.31}$$

Итак, расстояние между двумя точками по их координатам и метрическому тензору определено:

$$dl = \sqrt{\gamma_{ik} dx_i dx_k}. \tag{7.32}$$

Практическое значение формула (7.32) приобретает при условии, если в системе отсчета можно ввести единое время x_0. В таком случае γ_{ik} от времени не зависит и расстояния между телами постоянны.

7.4. Слабое стационарное гравитационное поле. Новый подход к гравитационному полю в ОТО должен в предельном случае слабых стационарных полей давать известные из ньютоновой теории результаты. В методическом отношении полезно описать известное поле средствами ОТО; это позволит проиллюстрировать часть введенных выше понятий на доступном примере.

Итак, рассматривается поле с ньютоновым потенциалом φ. Выберем систему координат. В слабых полях отклонение метрики трехмерного пространства (x, y, z) от евклидовой незначительно. Поэтому целесообразен выбор декартовых прямоугольных координат: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. В качестве временной координаты выберем $x_0 = ct$, где t — синхронизированное время инерциальной системы отсчета, т. е. время, устанавливаемое по часам тех точек системы, где $\varphi = 0$ (например, достаточно удаленных от гравитирующих масс). Это время будет одним и тем же: будет течь одинаково во всех точках системы. Практически в рассматриваемом случае временные отметки можно послать из точки, где расположены часы, в любую его точку с помощью световых сигналов.

Найдем метрический тензор четырехмерного пространства рассматриваемой системы отсчета со слабым полем. Для этого запишем интегралы, выражающие *действие* материальной точки в поле с потенциалом φ в классической и релятивистской форме. С помощью формул (I, 24.1), (I, 21.1), а также (7.3) имеем классическое выражение

$$S_{\text{кл}} = \int \left(-mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi\right) dt, \tag{7.33}$$

где к потенциальной энергии добавлена энергия покоя частицы mc^2.

Для получения релятивистского выражения используем формулу (4.3) и придадим ей инвариантное значение: $S_{\text{рел}} = -\int mcds$.

Однако придется учесть одно дополнительное обстоятельство. Для реальных движений интервалы мнимы (см. § 2.3), поэтому здесь ds — мнимая величина и мнимо действие $S_{\text{рел}}$. Так как мы будем приравнивать $S_{\text{рел}}$ и $S_{\text{кл}}$, а действие можно определить с точностью до постоянных множителей, запишем вместо (7.34) вещественную величину

$$S_{\text{рел}} = -mc\int ids. \tag{7.34}$$

Преобразуем (7.33) с учетом равенства $\vec{v}dt = d\vec{r}$:

$$S_{\text{кл}} = -mc\int cdt - \frac{1}{2}\frac{\vec{v}d\vec{r}}{c} + \frac{1}{c}\varphi dt. \tag{7.35}$$

Приравнивая (7.34) и (7.35), имеем:

$$ids = cdt - \frac{1}{2}\frac{\vec{v}d\vec{r}}{c} + \frac{1}{c}\varphi dt. \tag{7.36}$$

Далее следует воспользоваться (7.14): $ds^2 = g_{00}dx_0^2 + 2g_{0i}dx_0dx_i + g_{ik}dx_idx_k$ и сравнить ds^2 с квадратом (7.36), где члены с $\frac{v^2}{c^2}$ отброшены:

$$ds^2 = -(c^2 + 2\varphi)\,dt^2 + d\vec{r}^2. \tag{7.37}$$

В результате сравнения получаем:

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), \tag{7.38}$$

а остальные элементы тензора — нули и единицы.

Итак, искомый метрический тензор с приближенным значением элементов найден:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.39}$$

Характерно, что гравитационное поле учтено элементом тензора, в данном случае только g_{00}. Но и этого достаточно, чтобы четырехмерное пространство стало неевклидовым. Искривлением трехмерного пространства (x, y, z) мы пренебрегли, однако незначительные отклонения его от евклидового имеются, что можно понять, если вспомнить об отброшенных членах в (7.37).

Обратимся теперь к ходу собственного времени в рассматриваемом стационарном поле. Согласно (7.23) имеем: $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}}\,dx_0$ или с учетом выбора x_0:

$$d\tau = \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}}\,dt. \tag{7.40}$$

Таким образом, собственное время в разных точках пространства течет по-разному. Необходимо еще учесть сделанный ранее выбор x_0 и t — времени в точках $\varphi = 0$ за пределами поля. Учитывая, что в гравитационном поле $\varphi < 0$, находим, что собственное время течет медленнее в точках с меньшим потенциалом (модуль его больше). Замедление времени в гравитационном поле обнаружено экспериментально: это смещение спектральных линий в солнечном спектре в сторону низких частот относительно тех же линий, полученных в земных условиях, где модуль потенциала поля меньше.

В заключение проиллюстрируем примером отклонение геометрии пространства в неинерциальных системах от евклидовой. Метрический тензор для вращающейся системы (7.22) позволяет записать формулу (7.30) для элемента длины:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2d\varphi^2}{1 - \frac{\omega^2r^2}{c^2}}. \tag{7.41}$$

Неевклидовость пространства видна хотя бы из того, что длина окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вращения, не равна $2\pi r$. В самом деле,

$$\int \frac{r\,d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2r^2}{c^2}}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2r^2}{c^2}}} > 2\pi r.$$

7.5. Движение материальной точки в слабом поле. Получим уравнение движения точки в поле, используя принцип экстремального действия (I, 24.2) и вытекающие из него уравнения Лагранжа (I, 24.4). Действие для частицы в поле задается формулой (7.34): $S = -\int_a^b tmcds$.

Минимум действия на действительной траектории, требуемый принципом, означает движение по линии с кратчайшей длиной между начальной и конечной точками, т. е. по геодезической линии в кривом пространстве К чему это приводит, посмотрим на примере слабого постоянного поля (7.37), для которого

$$S = -\int_a^b mc\sqrt{-g_{00}dx_0^2 - \vec{r}^2}\,. \tag{7.42}$$

Для получения функции Лагранжа нужно придать действию обычный вид, т.е. выделить время, в данном случае единое $dt = \frac{dx_0}{c}$:

$$S = -\int_a^b mc^2\sqrt{-g_{00} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2}\,dt,$$

откуда

$$L = -mc^2\sqrt{-g_{00} - \frac{u^2}{c^2}}\,. \tag{7.43}$$

Теперь можно писать уравнение Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{d\vec{u}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$ для данного случая:

$$\frac{d}{dt}\frac{\frac{\vec{u}}{c^2}}{\sqrt{-g_{00} - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\operatorname{grad} g_{00}}{2\sqrt{-g_{00} - \frac{u^2}{c^2}}}\,. \tag{7.44}$$

Надо перейти к собственному времени от единого. С помощью (7.23) имеем: $dt = \frac{d\tau}{\sqrt{-g_{00}}}$, а также $\vec{u} = \frac{d\vec{r}\cdot\sqrt{-g_{00}}}{d\tau} = \vec{v}\sqrt{-g_{00}}$.

Поэтому (7.44) при переходе к собственному времени дает уравнение

$$\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-\operatorname{grad} g_{00}}{2g_{00}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{7.45}$$

Осталось использовать значение g_{00}, даваемое (7.38):

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-\operatorname{grad}\varphi}{\left(1+\frac{2\varphi}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Чтобы сравнить полученное уравнение движения с классическим, удобно ввести массу точки:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-\operatorname{grad}\varphi}{1+\frac{2\varphi}{c^2}}\,\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{7.46}$$

Как видим, в расчет принимается релятивистская масса как для инертных, так и для гравитационных свойств. Поправка вносится в выражение силы и за счет потенциала $\left(\text{знаменатель} \quad 1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)$

Выражение для энергии получаем по формуле (I, 22.2):

$$E = \frac{mc^2\sqrt{1 + 2\frac{\varphi}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{7.47}$$

Выражение (7.47) может быть разложено для $v \ll c$ и $\varphi \ll c$ в ряд и дать приближенное значение энергии:

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi \tag{7.48}$$

На этом знакомство с исходными положениями ОТО мы заканчиваем. Интересующимся можно порекомендовать книги Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшица и В. Ф. Фока (Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения.— М., 1961) до настоящего времени с непревзойденным по ясности изложением этой интереснейшей физической теории. Новый взгляд на релятивистскую теорию гравитации содержится в книге А. А. Логунова «Лекции по теории относительности и гравитации» — М.: Наука, 1987.

Упражнения к главе II

1. Обосновать противоречивость классического выражения второго закона Ньютона основам СТО.

2. Установить связь классического выражения кинетической энергии с релятивистским.

3. Получить уравнение движения и законы сохранения энергии для релятивистской частицы в потенциальном поле с лагранжианом

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + U(\vec{r}).$$

4. Две частицы взаимодействуют, находясь на значительном расстоянии друг от друга. Справедлив ли для их взаимодействия третий закон Ньютона в рамках представлений СТО?

5. Являются ли релятивистскими выражения закона Кулона, всемирного тяготения?

6. При какой скорости движения кинетическая энергия частицы равна энергии покоя?

7. Выразить кинетическую энергию частицы через ее импульс.

8. Сила $\vec{F}$ во время движения остается перпендикулярной скорости частицы и постоянна по модулю. Определить характер движения.

Ответ. Движение совпадает с классическим движением точки с массой $m_{\text{пол}} = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$ под действием постоянной силы, т. е., например, движением по окружности радиусом

$$r = \frac{v^2}{a} = \frac{v^2 m}{F\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

9. Сила $\vec{F}$ параллельна скорости и постоянна по модулю. Определить характер движения.

Ответ. Искомое движение совпадает с классическим для точки массой $m_{\text{пр}} = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$ и ускорением $a = \frac{F(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{m}$.