Приложение I

Некоторые формулы и выкладки векторного анализа

1 $\operatorname{grad} \varphi(x, y, z) = \nabla \varphi(x, y, z) = \dfrac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = \vec{i}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$

— формула градиента в декартовых координатах

2 $\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi$ — градиент суммы,
$\operatorname{grad}(C\varphi) = C\operatorname{grad}\varphi$ — C — константа,
$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi$ — градиент произведения,
$\operatorname{grad} U(\varphi(x, y, z)) = \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} \operatorname{grad}\varphi$ — градиент сложной функции

3 $d\varphi(x, y, z) = \operatorname{grad}\varphi d\vec{r} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} dz$ — полный дифференциал функции

4 $\operatorname{rot} \vec{a}(x, y, z) = \vec{i}\left(\dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)$
— формула ротора в декартовых координатах

5 $(\vec{a}\ \nabla\ \vec{b}) = a_x \dfrac{\partial \vec{b}}{\partial x} + a_y \dfrac{\partial \vec{b}}{\partial y} + a_z \dfrac{\partial \vec{b}}{\partial z}$ — определение оператора $(\vec{a}\ \nabla)$

6 $\operatorname{grad}(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\ \nabla)\vec{a} + (\vec{a}\ \nabla)\vec{b} + [\vec{b} \operatorname{rot} \vec{a}] + [\vec{a} \operatorname{rot} \vec{b}]$ — дифференциальное тождество, или формула градиента скалярного произведения векторов

7 Расчет силы Лоренца $\vec{Q} = -q\dfrac{d}{dt}\vec{A} - q \operatorname{grad}\varphi + q \operatorname{grad}(\vec{A}\vec{v})$ Так как $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$, то на основе формулы (5) имеем

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\ \nabla)\vec{A}$$

Последнее слагаемое находим с помощью формулы (6), учитывая, что $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$, так как v от координат явно не зависит, и $(\vec{A}\ \nabla)\vec{v} = 0$ по той же причине $\operatorname{grad}(\vec{A}\vec{v}) = (\vec{v}\ \nabla)\vec{A} + [\vec{v} \operatorname{rot}\vec{A}]$ Окончательно $\vec{Q} = -q\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q \operatorname{grad}\varphi + q[\vec{v} \operatorname{rot}\vec{A}]$