УЧЕНИЕ ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Глава I
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРИНЦИПЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В этой главе курса рассмотрены общие вопросы электродинамики как учения об электромагнитном поле. Ее положения и выводы необходимы для изучения каждой из остальных глав.

§ 1. Электрический заряд и электромагнитное поле

1.1. Заряд. Плотность заряда и плотность тока. Исходными для всей электродинамики являются такие понятия, как «электрический заряд» и «электромагнитное поле». Понятие «электрический заряд» тесно связано с особыми свойствами заряженных тел и частиц, которые проявляются в образовании электромагнитного поля, сопутствующего заряду, и в силовом действии поля на заряд. Эти два, вообще говоря, разных свойства заряженных тел – создавать поле и испытывать на себе действие поля других зарядов – характеризуются одной и той же величиной – электрическим зарядом Q.

Величина заряда определяется в физических измерениях по тем или иным проявлениям электромагнитного взаимодействия. Так, для точечных покоящихся зарядов предполагают, что сила взаимодействия между ними пропорциональна величине зарядов (закон Кулона). Поэтому, выбирая единичный заряд, можно определить величину другого заряда, сравнивая силы взаимодействия зарядов: единичного с единичным и единичного с неизвестным. В метрологии в настоящее время принят другой (не прямой) способ определения величины заряда, основанный на магнитном взаимодействии движущихся зарядов, образующих токи. По определению сила постоянного тока равна отношению заряда ко времени:

$$I = \frac{Q}{t},$$

где Q – заряд, проходящий за время t через поперечное сечение проводника. На основании предположения о пропорциональности механической силы взаимодействия двух линейных проводников силам тока в них установлена основная единица силы тока – ампер. (Ампер – сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ ньютона на каждый метр длины.)

Поэтому единица заряда – кулон – является производной единицей (см. [7, 8, 9])

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}.$$

Заряд – величина скалярная и выражается действительными числами: может иметь положительные, нулевые и отрицательные значения. Существенно, что заряд также и *скаляр* (инвариант) преобразований Лоренца, т. е. заряд некоторого тела или частицы выражается одним и тем же числом во всех инерциальных системах отсчета. Наконец, заряд – величина *аддитивная:* при соединении, например, двух точечных зарядов в один «результирующий» заряд будет равен алгебраической сумме соединенных зарядов. *Заряд любой системы заряженных тел и частиц равен сумме зарядов отдельных тел и частиц. Заряд макроскопического тела равен сумме зарядов его частей.*

Не следует думать, что перечисленные свойства заряда самоочевидны или априорны; все они результат обобщения опыта, отражение объективно существующих природных свойств тел и частиц. Опыт отвечает и на вопрос о непрерывности или дискретности заряда. Как известно, пределом дробимости электрического заряда является элементарный заряд, присущий электронам, протонам и другим заряженным элементарным частицам, модуль его $e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл. (Субэлементарные частицы – кварки – имеют заряды $\pm\frac{1}{3}e$ или $\pm\frac{2}{3}e$, но они в свободном состоянии не наблюдаются.)

Таким образом, электрический заряд по природе дискретен. Однако в классической электродинамике рассматривают макроскопические заряды, которые считаются непрерывными, а непрерывными заряды можно считать лишь без учета существования наименьшего элементарного заряда. Отсюда следует, что понятие бесконечно малого заряда dQ имеет физический, а не буквально математический смысл: dQ мало по сравнению с некоторым полным зарядом Q, но все еще так велико по сравнению с элементарным зарядом, что дискретность элементарных зарядов можно не принимать во внимание.

Непрерывность электрического заряда допускает и непрерывное его распределение в пространстве; оно описывается плотностью заряда, определяемой соотношением

$$\varrho = \frac{dQ}{dV}, \tag{1.1}$$

где dQ – заряд в элементе объема пространства dV. Рассматривая плотность зарядов, расположенных на телах, следует также учитывать, что элементарный заряд dQ сосредоточен в физически малом объеме пространства dV, размеры которого малы по сравнению с другими размерами в задаче. Однако этот объем все еще очень велик по сравнению с объемом отдельного атома. (Такое физическое, а не только математическое толкование dQ и dV следует иметь в виду на протяжении всего курса классической электродинамики.)

В целом ряде задач электродинамики можно отвлечься от материальных тел и частиц – носителей зарядов – и иметь дело только с зарядами, распределенными в пространстве тем или иным образом. Заряды рассматриваются условно как особая субстанция, распределенная в пространстве с плотностью ϱ.

Обсудим еще понятие «точечный заряд». Ему в классической электродинамике может быть придан двоякий смысл. Во-первых, за точечный заряд принимается бесконечно малый заряд dQ, находящийся в бесконечно малом элементе объема пространства. Эта модель точечного заряда соответствует его непрерывному распределению в пространстве. В таком случае

$$dQ = \varrho dV. \tag{1.1-а}$$

Во-вторых, в отдельных случаях используется модель дискретного в пространстве точечного заряда. Согласно этой модели любой величины макроскопический заряд q может быть сосредоточен в геометрической точке пространства. Плотность заряда в таком случае выражается формулой

$$\varrho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \tag{1.1-б}$$

где $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ – дельта-функция Дирака (см. П. III), а $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки, где расположен заряд. (Здесь и далее буква q используется для обозначения величины точечного заряда.)

Элементарный электрический заряд электрона e также является точечным. Но что касается дискретных зарядов элементарных частиц, то в рамках классической электродинамики нет возможности ставить вопрос об особенностях, вносимых в электромагнитное взаимодействие дискретностью зарядов как по величине, так и по пространственному распределению, ибо здесь отдельные элементарные заряды и их поля не рассматриваются. Взаимодействия элементарных зарядов между собой и особенности их полей описываются квантовой электродинамикой.

Чтобы подсчитать заряд в конечном объеме пространства, нужно знать его плотность $\varrho(\vec{r})$ в каждой точке и произвести суммирование:

$$Q = \int_V \varrho(\vec{r})\, dV. \tag{1.2}$$

Как известно, движущиеся электрические заряды создают ток. Для описания этого явления используется понятие плотности тока $\vec{j}$, которую определим соотношением

$$\vec{j}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r})\,\vec{v}(\vec{r}), \tag{1.3}$$

где ϱ – плотность заряда в некоторой точке пространства, а $\vec{v}$ – скорость движения заряда ϱdV в ней. (Если учитывать, что dV не является точкой, то речь идет о некоторой средней скорости частей заряда dQ в элементе объема dV с центром в точке $\vec{r}$.) Модуль плотности тока численно равен заряду, проходящему в единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной траекториям движения зарядов – линиям тока; направлен вектор $\vec{j}$ по касательной к линии тока.

От плотности тока нетрудно перейти к силе тока – заряду, протекающему через площадку S за единицу времени (рис. 1.1):

$$I = \int_S \vec{j}\,\overrightarrow{dS} = \int_S j_S dS, \tag{1.4}$$

где j_S – проекция вектора $\vec{j}$ на нормаль к площадке dS. Сила тока – скалярная величина; это поток вектора плотности тока через некоторую поверхность.

Если электрические заряды движутся, то плотность зарядов в пространстве может изменяться с течением времени, т. е. плотность заряда есть функция координат точки пространства и момента времени:

$$\varrho = \varrho(\vec{r},\ t).$$

В общем случае функцией координат и времени является и плотность тока:

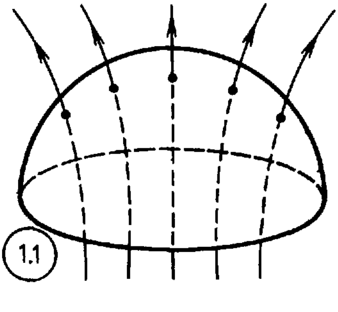
$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r},\ t).$$

Для точечного заряда

$$\varrho = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \tag{1.4-а}$$

$$\vec{j} = q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)). \tag{1.4-б}$$

Итак, распределение и движение электрических зарядов в пространстве описывается скалярной и векторной величинами: плотностью заряда ϱ и плотностью тока $\vec{j}$. В классической электродинамике эти две величины определяют действие некоторого заданного поля на движущиеся заряды и электромагнитное поле, созданное этими зарядами.



1.1

1.2. Закон сохранения заряда. Насколько это сейчас известно, в число точных (абсолютных) законов природы наряду с законами сохранения энергии, импульса, момента импульса входит и закон сохранения электрического заряда: *при любых известных взаимодействиях элементарных частиц между собой сумма (алгебраическая) электрических зарядов частиц до взаимодействия равна сумме электрических зарядов частиц после взаимодействия.* В процессе взаимодействия необязательно сохраняются частицы как таковые; не сохраняется их общее число, так как одни частицы исчезают, а другие возникают, но суммарный их заряд остается неизменным. Закон проверен на множестве реакций с элементарными частицами с высокой степенью точности.

Классическая электродинамика изучает процессы, при которых не происходит взаимных превращений заряженных частиц, так что закон сохранения заряда здесь есть простое следствие сохранения его носителей—электронов и протонов. *В изолированной системе электрический заряд сохраняется.* Изменение его в неизолированной системе определяется только токами зарядов, текущими из системы или в систему. Поэтому убыль величины заряда в любом объеме пространства в единицу времени равна току, вытекающему через поверхность, ограничивающую объем. Математическая формула закона сохранения имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \varrho dV = \oint\limits_S \vec{j}\,\overrightarrow{dS}. \tag{1.5}$$

Это интегральное равенство эквивалентно дифференциальному равенству

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{j}. \tag{1.6}$$

Для доказательства следует взять интеграл по объему от обеих частей равенства (1.6) и в правой части применить теорему Гаусса. Соотношение (1.6) называется *уравнением непрерывности* тока зарядов, оно выражает закон сохранения заряда в каждой точке пространства.

Закон сохранения заряда в форме (1.5) имеет следующий смысл: плотность зарядов изменяется только за счет их прихода и ухода из объема V. Заряды не «производятся» в каких-либо точках пространства и соответственно не «уничтожаются». Если бы были «источники» зарядов, то плотность изменялась бы и по этой причине. Пришлось бы записать

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = i - \operatorname{div}\vec{j},$$

где i—скорость рождения зарядов в точке пространства, т. е. заряд, производимый в единицу времени в единице объема.

Требует разъяснения еще одно обстоятельство, связанное с определением плотности тока выражением (1.3). В формуле

$$\vec{j}(\vec{r},\ t) = \varrho(\vec{r},\ t)\,\vec{v}(\vec{r},\ t)$$

речь идет о выделенном точечном движущемся заряде $dQ = \varrho dV$, проходящем за время dt через площадку $\overrightarrow{dS}$, коллинеарную $\vec{j}$. Величина этого заряда определяется плотностью $\varrho(\vec{r}, t)$ в заданной (неподвижной) точке. Это обстоятельство отражено в уравнении непрерывности (1.6) знаком частной производной $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$: рассматривается скорость изменения плотности заряда в неподвижной точке пространства.

При стационарном распределении зарядов $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ и $\operatorname{div}\vec{j} = 0$, т. е. имеет место движение зарядов лишь с замкнутыми линиями плотности тока. В случае точечных зарядов траектории движения являются замкнутыми кривыми.

Пример 1.1. **Непрерывное распределение заряда в пространстве.**

Оно может быть задано некоторой непрерывной функцией координат. Например,

$$\varrho = \varrho_0,$$

где ϱ_0 есть постоянная величина. Это означает, что заряд по всему бесконечному пространству распределяется с одинаковой плотностью. Такой случай на практике не реализуется и далее в теории не рассматривается. Практически имеют смысл лишь заряды конечной величины, так что выражение

$$Q = \int\limits_{\infty} \varrho dV$$

сходится, а не равно бесконечности. Поэтому плотность заряда, вообще говоря, убывающая функция расстояния от некоторой точки пространства, принятой за начало координат. Например,

$$\varrho = \varrho_0 e^{-r/R},$$

где r – расстояние от начала координат, совпадающего с точкой наибольшей плотности заряда, а R – радиус сферы, на которой плотность заряда уменьшается в e раз.

Пример 1.2. **Кусочно-непрерывное распределение заряда в пространстве.**

Такое распределение типично для практики. Заряд с плотностью $\varrho = \varrho_1(\vec{r})$ распределен в некоторой области пространства. В соседней с нею области плотность заряда описывается другой функцией $\varrho = \varrho_2(\vec{r})$. На границе областей (поверхности S) ϱ может измениться скачком на конечную величину.

Так, например, плотность заряда может быть задана условиями:

$$\varrho = \varrho_0, \ r \leqq a;$$
$$\varrho = 0, \ r > a.$$

В этом случае мы имеем дело с равномерно заряженным по объему шаром радиусом a, за пределами которого зарядов в пространстве нет.

Пример 1.3. **Заряженные поверхности и нити.**

На практике встречаются случаи таких заряженных областей, которые следует моделировать без учета их объема, т. е. геометрическими поверхностями. Например, заряды на проводящем теле конечных размеров располагаются в поверхностном слое очень малой толщины. В этом и аналогичных случаях вводится поверхностная плотность зарядов:

$$\sigma = \frac{dQ}{dS}.$$

Для случая $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ при $r = a$ мы имеем, таким образом, дело с равномерно заряженной сферой радиусом a. В других точках пространства зарядов нет.

Аналогично рассматриваются заряженные нити, для которых вводится линейная плотность зарядов:

$$\varrho_{\text{лин}} = \tau = \frac{dQ}{dl}.$$

Например, распределение $\tau = \tau_0 = \text{const}$ при $y = 0$, $z = 0$ соответствует равномерно заряженной нити, расположенной в пространстве вдоль оси Ox.

П р и м е р 1.4. **Вычисление силы тока, вытекающего из сферы.**

Плотность тока определяется соотношением $\vec{j} = \frac{\alpha}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки с началом в центре сферы; α – постоянная величина.

Используя формулу (1.4) и сферические координаты, имеем

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\alpha}{4\pi r^2} r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \alpha.$$

П р и м е р 1.5. **Определение изменения величины заряда в сфере.**

(См. условие предыдущей задачи.)

На основе закона сохранения заряда $-\int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV = \oint_S \vec{j}\, d\vec{S}$ имеем $\frac{dQ}{dt} = -\alpha$, $Q = Q_0 - \alpha t$, где Q_0 – величина заряда в начальный момент времени. Смысл коэффициента α выяснился: это скорость изменения заряда, сосредоточенного внутри сферы.

1.3. Электромагнитное поле. Напряженность электрического поля. Индукция магнитного поля. Электромагнитное поле – основной объект, изучаемый в электродинамике. Электрический заряд есть свойство заряженных частиц и заряженных тел, а электромагнитное поле, как уже говорилось,– вид материи, в макромире отличный от вещества. Существенное отличие поля от тел состоит в отсутствии локализации его в четко ограниченных областях пространства: электромагнитное поле, сопутствующее заряженным телам, занимает области без резкой границы, характерной для макроскопических тел. Кроме того, поля обладают проницаемостью: в одной и той же области пространства могут существовать одновременно несколько полей, тогда как поместить несколько тел в одну и ту же область пространства без изменения их свойств не удается. В общем случае мы имеем дело с переменным электромагнитным полем, рассеивающимся в пространстве и стремящимся занять возможно большую пространственную зону. Так, например, система электрических зарядов, ускоренно движущихся в некоторой пространственной области, излучает поле в виде электромагнитных волн в пространство, окружающее указанную область. Часто для конкретных систем зарядов приходится рассматривать поле во всем безграничном пространстве. При этом необходимо знать характер ослабления поля по мере удаления его от источника. (Вспомним, например, поле покоящегося точечного электрического заряда.)

Единство материи в виде вещества и поля проявляется в том, что имеются универсальные физические понятия, равно применимые ко всем физическим объектам: энергия, импульс, момент импульса. Эти величины присущи полю и в макроскопической модели поля считаются непрерывно распределенными с определенной плотностью по всему объему, занимаемому полем. Действия поля на тела, а также на органы чувств человека связаны с названными характеристиками поля; при взаимодействии поля с веществом меняется состояние поля и тел, изменяются энергии, импульсы, моменты.

Например, хорошо известно превращение энергии света во внутреннюю энергию тел, а также энергии электромагнитного поля, связанного с электрическим током, в механическую энергию (электродвигатель) и т. д.

Однако такие параметры, как энергия и импульс, не используются в качестве первоначальных или исходных для описания электромагнитных полей, ибо законы изменения и сохранения энергии, импульса и момента импульса не отражают специфики электромагнитных явлений. Первоначальным в этом плане считается силовое действие электромагнитного поля на внесенные в него электрические заряды. Удается различить две составляющие силы, действующие на заряд: электрическую $\vec{F}_э$, действующую как на покоящийся, так и на движущийся заряд независимо от скорости его движения, и магнитную $\vec{F}_м$, действующую только на движущийся заряд и существенно зависящую от его скорости. Соответственно вводятся две исходные характеристики: напряженность $\vec{E}$ электрического поля и индукция $\vec{B}$ магнитного поля, определяемые соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_э &= q\vec{E}, \\ \vec{F}_м &= q\,[\vec{v}\,\vec{B}\,]. \end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

Эти формулы написаны на основании изучения результатов экспериментов по действию поля на различные заряды, движущиеся с разной скоростью. Опытным фактом является пропорциональность электрической силы и магнитной величине электрического заряда q. Пропорциональность имеет место в любом поле, в котором помещен заряд. Но в разных полях на покоящийся электрический заряд действует разная сила. Таким образом, сомножитель $\vec{E}$ в первой формуле в соответствии со скалярной природой заряда является вектором, характеризующим силовое действие поля на заряд в каждой точке поля. Что касается магнитной силы, то она зависит от скорости движения зарядов, причем из опыта вытекает пропорциональность силы модулю скорости и перпендикулярность к ней. Вектор $\vec{B}$ во второй формуле (1.7) характеризует магнитное поле в точке, где находится в данный момент движущийся заряд. В общем случае на точечный заряд в электромагнитном поле действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\,[\vec{v}\,\vec{B}]. \qquad (1.8)$$

На основании формул (1.7) устанавливаются единицы напряженности и индукции:

$$1\,\frac{В}{м} = 1\,\frac{Н}{Кл}, \quad 1Тл = 1\,\frac{Н}{Кл \cdot м/с}. \qquad (1.9)$$

При практическом измерении напряженности поля измеряют силу, действующую на покоящееся заряженное тело, помещенное в электрическом поле. Поскольку тело имеет конечные размеры, напряженность определяется лишь в предположении об однородности поля в пределах участка пространства, занимаемого телом. Иными словами, поле в этом объеме при измерении усредняется. Соответственно при измерении магнитной индукции $\vec{B}$ поля используется некоторый проводник длиной l, на протяжении которого поле приходится считать однородным.

При измерениях напряженности $\vec{E}$ и индукции $\vec{B}$ поля различают *заряд, создающий поле,* и *пробный заряд,* вносимый в поле для определения его характеристик (заряд q в формуле (1.8)). Пробный заряд должен быть достаточно мал, чтобы его собственное поле не влияло на систему зарядов, создающих поле, т. е. на результаты измерений.

Приведенные выше формулы (1.7) и (1.8) используются нами как *определения* векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ поля. Это, однако, не означает, что для нахождения указанных величин всегда необходимо прибегать к эксперименту. Величины $\vec{E}$ и $\vec{B}$ могут быть рассчитаны по расположению и движению зарядов, создавших поле; именно такая задача чаще всего и является основной в электродинамике.

Поле определено или задано, если в каждой точке пространства в каждый момент времени известно значение двух величин:

$$\vec{E}=\vec{E}(\vec{r},\ t) \text{ и } \vec{B}=\vec{B}(\vec{r},\ t),$$

иными словами, если известны две векторные функции (или шесть скалярных) четырех независимых переменных. Поля называются *стационарными,* если функции $\vec{E}$ и $\vec{B}$ не содержат времени. Если же они не зависят от координат, то поля *однородны.* В общем случае поля неоднородны в пространстве и переменны во времени.

Задание поля системы зарядов в вакууме с помощью напряженности $\vec{E}$ и индукции $\vec{B}$ оказывается достаточным: по этим двум векторам определяются не только силы, действующие на заряды, но и, как это будет показано ниже, энергия поля, его импульс, перемещение энергии (ее поток) в пространстве и т. д.

В заключение выясним одну терминологическую тонкость. Принято говорить, что заряды создают поле. Однако заряды никогда не существуют без поля: *заряды неразрывно связаны с полем,* так что указанное выражение имеет условный смысл. Но в отдельных случаях (неравномерное движение) заряды излучают электромагнитные волны, т. е. порождают поле, существующее далее *самостоятельно.* Это обстоятельство в известной мере и оправдывает выражение «заряды создают поле». Сам термин «поле» иногда используется и для обозначения области пространства, которую поле занимает.

Пример 1.6. **Выражение для плотности силы Лоренца.**

На элемент тела объемом dV с зарядом $dQ=\varrho dV$ действует электрическая составляющая силы Лоренца:

$$d\vec{F}_э=\vec{E}\varrho dV$$

Магнитная составляющая выразится формулой

$$d\vec{F}_м=\varrho dV\,[\vec{v}\,\vec{B}\,].$$

Применяя формулу

$$\vec{j}=\varrho\vec{v},$$

имеем для магнитной составляющей силы Лоренца, действующей на элемент проводника объемом dV:

$$d\vec{F}_{м} = [\vec{j}\,\vec{B}]\,dV.$$

Таким образом, плотность силы Лоренца оказывается величиной

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \varrho\vec{E} + [\vec{j}\,\vec{B}].$$

Пример 1.7. **Сила Ампера.**

Сила тока в линейном проводнике, т. е. в таком, поперечное сечение которого мало по сравнению с длиной, может считаться равной произведению постоянной плотности тока на сечение (рис. 1.2):

$$I = jS.$$

Вводя элемент проводника длиной dl, совпадающий по направлению для линейного проводника с вектором $\vec{j}$, имеем для элемента тока $\vec{j}dV$ выражение

$$\vec{j}dV = I\,\overrightarrow{dl}, \tag{1.10}$$

часто входящее в формулы электродинамики. Поэтому магнитная составляющая силы Лоренца, действующая на элемент длины линейного проводника, равна:

$$d\vec{F}_{м} = I\,[\overrightarrow{dl}\,\vec{B}]. \tag{1.11}$$

Эта сила называется *силой Ампера*.

Пример 1.8. **Потенциальное поле.**

Электромагнитное поле является полем векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Напомним, что векторные поля бывают двух видов: потенциальные и вихревые.

Поле некоторого вектора $\vec{E}\,(\vec{r})$ называют *потенциальным* или полем источников, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= 0, \\ \operatorname{div}\vec{E} &\neq 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

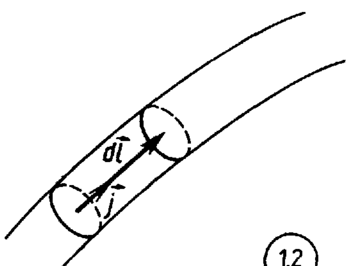
В общем случае потенциального поля

$$\operatorname{div}\vec{E} = \varrho\,(\vec{r}), \tag{1.13}$$

где $\varrho\,(\vec{r})$ — некоторая функция точки пространства. Условие потенциальности (1.12) можно записать по-другому, вводя скалярный потенциал поля $\varphi\,(\vec{r})$·

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi\,(\vec{r}). \tag{1 14}$$

Если использовать формулу 25 из приложения II, помещенного в конце книги, то из соотношения (1.14) следует тождество $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$. (Далее номера приложений и номера



1.2

используемых из них формул будут записаны в тексте сокращенно, например П. II, 25). Подстановка же (1.14) в (1.13) приводит к уравнению

$$\Delta\varphi = -\varrho. \tag{1.15}$$

Уравнение (1.15) позволяет при некоторых дополнительных условиях по заданной функции $\varrho(\vec{r})$ определить $\varphi(\vec{r})$, а затем с помощью формулы (1.14) – поле $\vec{E}(\vec{r})$ (о том, как это делается, рассказано ниже).

Пример 1.9. **Вихревое поле.**

Поле некоторого вектора $\vec{B}(\vec{r})$ называется *вихревым* (или соленоидальным), если выполняются условия:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec{B} \neq 0. \tag{1.16}$$

В общем случае вихревого поля

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{j}(\vec{r}), \tag{1.17}$$

где $\vec{j}(\vec{r})$ – некоторая векторная функция точки пространства. Условие соленоидальности (1.16) позволяет ввести векторный потенциал поля $\vec{A}(\vec{r})$ соотношением

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{1.18}$$

На основании формулы (П. II, 26) из выражения (1.18) следует тождество $\operatorname{div}\vec{B} = 0$.

При подстановке выражения (1.18) в равенство (1.17) с учетом условий (1.16) приходим к уравнению

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{j}(\vec{r}). \tag{1.19}$$

Если $\vec{j}(\vec{r})$ – известная функция, то с помощью уравнения (1.19) рассчитывается $\vec{A}(\vec{r})$, а затем по выражению (1.18) – и поле $\vec{B}(\vec{r})$.

Пример 1.10. **Поле с потенциальной и вихревой составляющими.**

К потенциальным и вихревым полям сводятся все векторные поля, изучаемые в нашем курсе. Пусть имеется некоторое поле $\vec{E}(\vec{r})$. Если $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$, $\operatorname{div}\vec{E} \neq 0$ – поле потенциальное. Если $\operatorname{rot}\vec{E} \neq 0$, $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ – поле вихревое.

Рассмотрим также случай $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$, $\operatorname{div}\vec{E} = 0$. Из первого условия следует, что поле потенциально: $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. Второе приводит для него к уравнению

$$\Delta\varphi = 0.$$

Начиная с условия соленоидальности, аналогично получаем

$$\Delta\vec{A} = 0.$$

Но в нашем случае оба эти уравнения имеют только нулевые решения, так как ни одна из точек пространства в условиях не выделена. Так как во всех точках пространства $\varphi \equiv 0$, $\vec{A} \equiv 0$, то $\vec{E} \equiv 0$, $\vec{B} \equiv 0$,– поля нет.

Осталось рассмотреть случай, когда

$$\operatorname{div}\vec{E} \neq 0, \ \operatorname{rot}\vec{E} \neq 0. \tag{1.20}$$

Представим вектор $\vec{E}$ в виде двух векторов:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

так, что

$$\operatorname{rot}\vec{E}_1 = 0, \ \operatorname{div}\vec{E}_1 \neq 0; \ \operatorname{rot}\vec{E}_2 \neq 0, \ \operatorname{div}\vec{E}_2 = 0.$$

Условия (1.20) удовлетворяются. Отсюда видно, что поле вектора $\vec{E}$ имеет потенциальную составляющую $\vec{E}_1$ и вихревую $\vec{E}_2$.

Теперь все возможные случаи исчерпаны, любые поля сводятся таким способом к указанным двум видам.

§ 2. Система уравнений Максвелла – основа электродинамики

2.1. Уравнения Максвелла для системы зарядов в вакууме. В предыдущем параграфе описаны основные характеристики электриче-