используемых из них формул будут записаны в тексте сокращенно, например П. II, 25). Подстановка же (1.14) в (1.13) приводит к уравнению

$$\Delta\varphi = -\varrho. \tag{1.15}$$

Уравнение (1.15) позволяет при некоторых дополнительных условиях по заданной функции $\varrho(\vec r)$ определить $\varphi(\vec r)$, а затем с помощью формулы (1.14) – поле $\vec E(\vec r)$ (о том, как это делается, рассказано ниже).

Пример 1.9. **Вихревое поле.**

Поле некоторого вектора $\vec B(\vec r)$ называется *вихревым* (или соленоидальным), если выполняются условия:

$$\operatorname{div}\vec B = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec B \neq 0. \tag{1.16}$$

В общем случае вихревого поля $\qquad \operatorname{rot}\vec B = \vec j(\vec r), \qquad (1.17)$

где $\vec j(\vec r)$ – некоторая векторная функция точки пространства. Условие соленоидальности (1.16) позволяет ввести векторный потенциал поля $\vec A(\vec r)$ соотношением

$$\vec B = \operatorname{rot}\vec A. \tag{1.18}$$

На основании формулы (П. II, 26) из выражения (1.18) следует тождество $\operatorname{div}\vec B = 0$.

При подстановке выражения (1.18) в равенство (1.17) с учетом условий (1.16) приходим к уравнению

$$\Delta\vec A(\vec r) = -\vec j(\vec r). \tag{1.19}$$

Если $\vec j(\vec r)$ – известная функция, то с помощью уравнения (1.19) рассчитывается $\vec A(\vec r)$, а затем по выражению (1.18) – и поле $\vec B(\vec r)$.

Пример 1.10. **Поле с потенциальной и вихревой составляющими.**

К потенциальным и вихревым полям сводятся все векторные поля, изучаемые в нашем курсе. Пусть имеется некоторое поле $\vec E(\vec r)$. Если $\operatorname{rot}\vec E = 0$, $\operatorname{div}\vec E \neq 0$ – поле потенциальное. Если $\operatorname{rot}\vec E \neq 0$, $\operatorname{div}\vec E = 0$ – поле вихревое.

Рассмотрим также случай $\operatorname{rot}\vec E = 0$, $\operatorname{div}\vec E = 0$. Из первого условия следует, что поле потенциально: $\vec E = -\operatorname{grad}\varphi$. Второе приводит для него к уравнению

$$\Delta\varphi = 0.$$

Начиная с условия соленоидальности, аналогично получаем

$$\Delta\vec A = 0.$$

Но в нашем случае оба эти уравнения имеют только нулевые решения, так как ни одна из точек пространства в условиях не выделена. Так как во всех точках пространства $\varphi \equiv 0$, $\vec A \equiv 0$, то $\vec E \equiv 0$, $\vec B \equiv 0$,– поля нет.

Осталось рассмотреть случай, когда

$$\operatorname{div}\vec E \neq 0, \quad \operatorname{rot}\vec E \neq 0. \tag{1.20}$$

Представим вектор $\vec E$ в виде двух векторов:

$$\vec E = \vec E_1 + \vec E_2$$

так, что

$$\operatorname{rot}\vec E_1 = 0, \ \operatorname{div}\vec E_1 \neq 0; \ \operatorname{rot}\vec E_2 \neq 0, \ \operatorname{div}\vec E_2 = 0.$$

Условия (1.20) удовлетворяются. Отсюда видно, что поле вектора $\vec E$ имеет потенциальную составляющую $\vec E_1$ и вихревую $\vec E_2$.

Теперь все возможные случаи исчерпаны, любые поля сводятся таким способом к указанным двум видам.

§ 2. Система уравнений Максвелла – основа электродинамики

2.1. Уравнения Максвелла для системы зарядов в вакууме. В предыдущем параграфе описаны основные характеристики электрических зарядов и электромагнитного поля. Сейчас изучим количественные связи между напряженностью и индукцией поля, с одной стороны, и плотностями зарядов и токов в пустом пространстве (вакууме) – с другой. Эти связи выражаются довольно сложной системой дифференциальных уравнений в частных производных, носящих название системы уравнений Максвелла.

Впервые полная система уравнений была записана Д. К. Максвеллом в виде уравнений поля в веществе (см. § 15, п. 15.3). В математическом отношении уравнения поля для вакуума являются частными случаями уравнений поля для вещества ($\mu = \varepsilon = 1$). Однако в физическом плане уравнения в вакууме играют более фундаментальную роль. Как исходная система уравнений Максвелла для элементарных зарядов в пустоте впервые применена Х. А. Лоренцом в 1903 г. Современный вид уравнения Максвелла, используемые нами ниже, приобрели в работах Г. Герца и О. Хэвисайда в конце прошлого века.

По отношению ко всему учению об электромагнитном поле система уравнений Максвелла играет роль первоначальных исходных положений, или теоретических принципов. С исторической точки зрения она является абстрактным обобщением экспериментальных данных, и ее связь с эмпирическими законами электродинамики будет показана далее. Сейчас выпишем уравнения без обсуждения их происхождения и истории открытия, т. е. в готовом виде:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \text{(2.1-а)} \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0; & \text{(2.1-б)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}, & \text{(2.1-в)} \\ \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0}. & \text{(2.1-г)} \end{cases}$$

В уравнения входят следующие константы:

$\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6} \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}$ – магнитная постоянная;

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$ – электрическая постоянная.

Они появились здесь вследствие выбора единиц измерения величин $\vec{E}$ и $\vec{B}$, с одной стороны и ϱ и $\vec{j}$ – с другой, независимо от их связи, указываемой уравнениями.

Прямым расчетом можно убедиться, что

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}, \tag{2.2}$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – константа, равная скорости света в вакууме. Далее будет показано, что формула (2.2) отражает не случайное совпадение, а константа c имеет глубокую связь с уравнениями (§ 5).

Используя равенство (2.2), уравнения Максвелла можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & (2.3\text{-а}) \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0; & (2.3\text{-б}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\,\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}, & (2.3\text{-в}) \\ \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0}. & (2.3\text{-г}) \end{cases}$$

Уравнения (2.1) или (2.3) устанавливают связь между векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$ поля, плотностью заряда и плотностью тока в каждой точке пространства в любой момент времени. Таков общий смысл любых дифференциальных уравнений в частных производных по координатам точки пространства и по времени. Все переменные величины, входящие в уравнения $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$, $\varrho(\vec{r}, t)$, $\vec{j}(\vec{r}, t)$, математически есть функции четырех независимых переменных: трех пространственных координат и времени.

Частные производные в уравнениях имеют обычный смысл: при дифференцировании по одной из переменных остальные считаются постоянными. Частное дифференцирование по времени означает, что поле и заряд рассматриваются в неподвижной точке пространства. (Так как заряды движутся, важно помнить, что их плотность ϱ и величина ϱdV находятся именно в неподвижной точке для неподвижного объема dV.)

Уравнения Максвелла (2.1) или (2.3) непосредственно применимы при изучении макроскопических потоков элементарных частиц или ионов в пустоте (например, электронные пучки, плазма и т. д.). Вообще говоря, их нельзя использовать, если система электрических зарядов расположена на телах, токи движутся по проводникам, а не непосредственно в вакууме, так как вещество существенно влияет на электромагнитное поле, на плотности токов и зарядов. Однако и при наличии тел возникает возможность непосредственного применения уравнений (2.1). В ряде очень важных случаев тела, которые определяют расположение и движение зарядов, сами не влияют на поле. Так, например, поле малых по размерам заряженных тел в воздухе рассчитывается как поле системы зарядов в вакууме; магнитное поле линейного проводника с током — как поле соответствующего тока в вакууме и т. д.

Уравнения Максвелла разделены на две пары для того, чтобы подчеркнуть наличие связей между отдельными уравнениями: второе уравнение в каждой паре следует из первого. Покажем это.

Возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (2.1-а):

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{E} = -\operatorname{div}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{B} = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{div}\vec{B}$ всегда постоянна во времени. Но постоянная во времени дивергенция от произвольного переменного поля может быть только нулем. Значит, $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, что уже отражено в уравнении (2.1-б).

Точно так же, вычислив дивергенцию от обеих частей уравнения (2.1-в), имеем

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}\vec{E} + \operatorname{div}\vec{j} = 0, \tag{2.4}$$

откуда с помощью уравнения непрерывности (1.6) получаем уравнение (2.1-г).

При другом подходе к системе (2.1) можно не считать уравнение непрерывности (1.6) отдельным и независимым постулатом теории электричества. Его можно получить из уравнений Максвелла. Для этого подставим в равенство (2.4) $\operatorname{div}\vec{E}$, взятую из уравнения (2.1-г). Получаем закон сохранения заряда в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0.$$

Как известно, имеется глубокая связь законов сохранения важнейших физических величин с симметриями пространства-времени (или иными симметриями). «Правильные» уравнения движения материальных тел или полей в любой фундаментальной физической теории (в механике, электродинамике и т д.) содержат в себе законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, заряда и других физических величин В этом плане существенно важно то, что закон сохранения заряда вытекает из уравнений Максвелла. (Этот закон связан с так называемой калибровочной инвариантностью основных уравнений электродинамики) Но сам закон шире рамок классической электродинамики; как показывает опыт, он справедлив для всех взаимодействий в природе. Поэтому к системе уравнений (2.1) обычно добавляется пятое соотношение: уравнение непрерывности (1.6). В таком случае только два из уравнений (2.1) можно считать независимыми – (2.1-а) и (2 1-в)

Заметим, что в физике не стремятся использовать непременно минимальную систему исходных положений. Если отношения между уравнениями выяснены, то обычно применяется несколько избыточная, но достаточно удобная и физически содержательная система. В электродинамике используются все четыре уравнения (2.1). Зависимые уравнения (2.1-б) и (2.1-г) несут важную физическую информацию и непосредственно применяются в ряде задач. Так, соотношение $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ истолковывается следующим образом. не существует в природе магнитных зарядов $Q_м$, создающих магнитное поле подобно тому, как электрические заряды Q создают электрическое поле.

Здесь следует сделать небольшое отступление. Как известно, элементарные магнитные диполи существуют· многие элементарные частицы (электроны, протоны, нейтроны и др.) обладают собственным магнитным моментом, называемым спиновым. Он не зависит от движения частицы в пространстве. Однако «монополей», т. е. положительных и отрицательных магнитных зарядов, которые образовали бы поле $\vec{B}$ по закону $\operatorname{div}\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\varrho_м$, не обнаружено, несмотря на специально поставленные многочисленные и разнообразные эксперименты.

2.2. Интегральная форма уравнений Максвелла. Графическое изображение полей. Уравнения (2.1) и (2.3) позволяют найти электромагнитное поле по расположению и движению зарядов в пространстве. Для этого требуется решить систему дифференциальных уравнений в частных производных. Это сложная математическая проблема даже для сравнительно простых систем зарядов, хотя уравнения содержат производные только первого порядка как по координатам, так и по времени. Расчеты полей в конкретных задачах часто облегчаются, если перейти к интегральной форме уравнений Максвелла. Кроме того, интегральная форма уравнений нагляднее физически и помогает понять их смысл.

Начнем с уравнения (2.3-г). Выделим в пространстве некоторый объем V, ограниченный замкнутой поверхностью S. Пусть внутри объема имеются заряды, распределенные с плотностью ϱ (рис. 2.1). Проинтегрируем четвертое уравнение системы (2.3) по объему V. Получим

$$\int\limits_V \operatorname{div}\vec{E}dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_V \varrho dV.$$

В левой части полученного равенства применим теорему Гаусса и учтем, что интеграл в правой части дает заряд Q в объеме V:

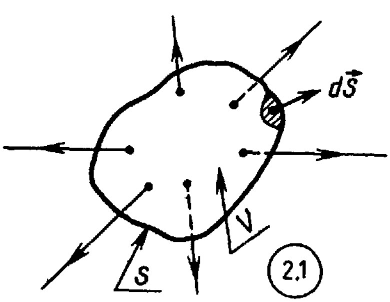
$$\oint\limits_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q. \tag{2.5}$$

Величина $\vec{E}\,\overrightarrow{dS} = d\Psi$ носит название элементарного *потока* вектора напряженности электрического поля через площадку dS. Конечный поток через поверхность S выражается формулой

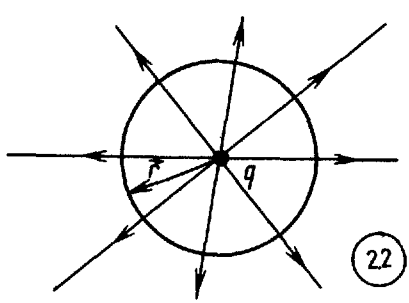
$$\Psi = \int\limits_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS}\,. \tag{2.6}$$

Отсюда видно, что интеграл в формуле (2.5) есть *поток вектора напряженности* через замкнутую поверхность, окружающую заряд Q. Эта формула рассматривается как интегральное выражение, физически и математически эквивалентное четвертому уравнению Максвелла. Его часто называют теоремой Гаусса.

На рисунке 2.1 в целях наглядности поле вектора $\vec{E}$ изображается линиями. Такие рисунки делаются в соответствии с договоренностью о графическом изображении полей. Линия вектора (в данном случае напряженности) проходит в пространстве так, что вектор касателен к



2.1



2.2

ней в каждой точке. Заметим, что вдоль касательной к линии напряженности направлена также и сила $\vec{F}_э$, действующая на заряд, помещенный в поле. Поэтому линии вектора напряженности называют еще силовыми линиями. Их проводят столько, чтобы число линий, пересекающих поверхность, всюду перпендикулярную силовым линиям, было равно Ψ. Аналогично изображаются и поля других векторов.

Пример 2.1. **Поле неподвижного точечного заряда.**
Согласно закону Кулона

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{2.7}$$

Картина силовых линий дана на рисунке 2.2. Если вычислить поток вектора по формуле (2.7) через поверхность сферы с центром в точке расположения заряда, то он окажется равным $\frac{1}{\varepsilon_0}q$, как это и требуется по теореме Гаусса (2.5).

Обратимся теперь к уравнению (2.3-б). Выкладки, аналогичные предыдущим, приводят к выводу: *поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю:*

$$\oint_S \vec{B}\,\overrightarrow{dS} = 0. \tag{2.8}$$

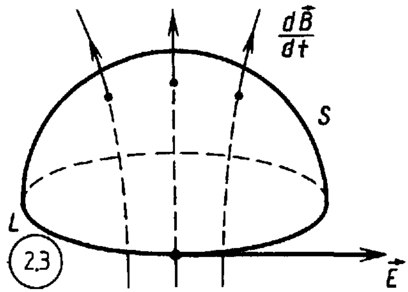
Поток вектора $\vec{B}$ через некоторую поверхность S обозначается буквой Φ:

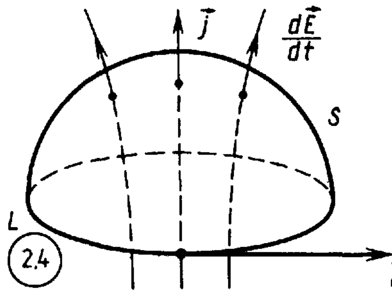
$$\Phi = \int_S \vec{B}\,\overrightarrow{dS}. \tag{2.9}$$

Магнитное поле изображается линиями вектора индукции $\vec{B}$. Число линий, пересекающих поверхность, всюду ортогональную направлению вектора $\vec{B}$, равно потоку вектора через эту поверхность. Из соотношения (2.3-б) или (2.8) следует, что линий индукции всегда замкнуты. Сколько линий выходит из объема V, столько же и входит в этот объем. Они не могут начинаться или заканчиваться в пределах выделенного конечного объема. Напротив, линии вектора напряженности $\vec{E}$ могут начинаться или заканчиваться в точках расположения зарядов (или уходить в бесконечность). Поэтому уравнение (2.8) также говорит об отсутствии магнитных зарядов, как и исходная формула (2.3-б).

Перейдем к уравнению (2.1-а) или (2.3-а). Для выполнения последующих преобразований рассмотрим в пространстве некоторый замкнутый контур L, стягиваемый поверхностью S (рис. 2.3). Найдем потоки векторов $\operatorname{rot}\vec{E}$ и $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ через поверхность S:

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{E}\,\overrightarrow{dS} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\overrightarrow{dS}.$$





В правой части равенства переменим местами дифференцирование и интегрирование, что даст

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \overrightarrow{dS} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \, \overrightarrow{dS} .$$

Учтем формулу (2.9) и получим

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} \, \overrightarrow{dS} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} . \qquad (2.10)$$

Фактически нет различия в производных $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{d}{dt}$ от интегральной характеристики поля Φ, не зависящей от координат точки пространства. Однако мы в этом и других аналогичных случаях сохраняем обозначение частной производной по времени, имея тем самым в виду *неподвижный* контур.

В левой части равенства (2.10) применим теорему Стокса. Приходим к равенству.

$$\oint_L \vec{E} \, \overrightarrow{dl} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} . \qquad (2.11)$$

Вклад в интеграл дает только вихревая составляющая электрического поля. Интеграл от потенциальной составляющей равен нулю.

Это и есть первое уравнение Максвелла в интегральной форме. Выражение под знаком интеграла ($\vec{E} \, \overrightarrow{dl}$) численно равно элементарной работе электрических сил, производимой над единичным точечным зарядом, внесенным в поле. Весь интеграл равен работе по конечному замкнутому контуру L. Эта величина называется *циркуляцией* вектора $\vec{E}$ и обозначается через $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} \, \overrightarrow{dl} . \qquad (2.12)$$

Формула (2.11) наглядно показывает, что электрическое поле, кроме составляющей с линиями напряженности, начинающимися и оканчивающимися на зарядах, имеет составляющую с замкнутыми линиями, охватывающими линии индукции переменного магнитного поля (см. рис. 2.3).

Займемся, наконец, уравнением (2.3-в). Выполнив преобразования, аналогичные тем, которые привели к формуле (2.11), получим интегральное соотношение

$$\oint_L \vec{B}\,\overrightarrow{dl} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2}\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,\overrightarrow{dS}, \tag{2.13}$$

эквивалентное третьему уравнению Максвелла. Равенство (2.13) связывает циркуляцию вектора магнитной индукции $\vec{B}$ с величиной тока I, пронизывающего контур L, и с изменением потока напряженности электрического поля $\vec{E}$ через поверхность S, опирающуюся на контур. Действительно,

$$\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,\overrightarrow{dS} = \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{2.14}$$

Уравнение (2.13) свидетельствует о том, что замкнутые линии магнитной индукции охватывают линии тока и линии напряженности переменного электрического поля (рис. 2.4). В целом интегральная форма уравнений позволяет достаточно наглядно представить связь полей, зарядов, токов.

Пример 2.2. **Индукция тока в проводнике.**

Пусть поток Φ, пронизывающий контур L (см. рис. 2.3), изменяется с течением времени по закону $\Phi = \Phi_0 \sin \omega t$. В таком случае циркуляция вектора напряженности электрического поля по контуру определяется формулой $\mathcal{E} = \Phi\omega \cos \omega t$. Если по контуру проложен проводник, то в нем наводится ЭДС, равная $\mathcal{E}$, и, если проводник замкнут, течет индукционный ток

2.3. Связь уравнений Максвелла с эмпирическими законами электромагнитных явлений. В системе уравнений Максвелла (2.3) содержатся все сведения о макроскопическом электромагнитном поле. Поэтому не удивительно, что из нее в качестве следствий вытекают отдельные законы электрических или магнитных явлений, установленные экспериментально в период, предшествующий созданию Максвеллом общей теории электромагнитного поля. Исторически эти законы явились эмпирическим базисом теории Максвелла.

Так, с формулой (2.5), а значит, и с уравнением Максвелла (2.1-г) непосредственно связан закон Кулона для взаимодействия покоящихся точечных электрических зарядов. Такие заряды создают поле, определяемое только уравнением (2.5).

Соотношение (2.11) совпадает с выражением закона Фарадея для электромагнитной индукции, если циркуляцию вектора $\vec{E}$ по контуру L назвать электродвижущей силой $\mathcal{E}_{\text{инд}}$, а контур заменить проводником. Это значит, что закон Фарадея вытекает из уравнения Максвелла (2.1-а).

Формула (2.13) и соответственно уравнение Максвелла (2.1-в) отражают открытое Эрстедом магнитное действие тока и приводят к закону Био-Савара (в § 8 п. 8.2. будет показано, что закон Био-Савара есть прямое следствие уравнения 2.1-в).

Наконец, отсутствие магнитных зарядов, вытекающее из уравнения Максвелла (2.1-б), можно увязать с гипотезой Ампера о происхождении намагничивания тел за счет «молекулярных» токов в веществе.

Далее в примерах из законов Максвелла выводятся некоторые эмпирические законы электромагнетизма. Во многих задачах применяется интегральная форма уравнений Максвелла.

Пример 2.3. **Закон Кулона.**

Точечный заряд q_1 окружим сферой радиусом r с центром в точке расположения заряда (см. рис. 1.4). В силу изотропности пространства поле заряда должно обладать центральной симметрией. Линии напряженности такого поля радиальны. На поверхности сферы напряженность постоянна. Поэтому соотношение (2.5) дает

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q_1 .$$

Учитывая направление силовых линий, приходим к формуле (2.7).

Если теперь поместить в поле (2.7) другой точечный заряд q_2, то по определению напряженности (1.7) на него будет действовать сила

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \qquad (2.15)$$

Это и есть выражение закона Кулона. При выводе не учитывалось действие поля точечного заряда на этот заряд (см. § 7, п. 7.3 и § 11, п. 11.1).

Если в рассуждениях заряды поменять местами, то обнаружится, что на заряд q_1 действует сила

$$\vec{F}_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

причем $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Это значит, что взаимодействие зарядов подчиняется третьему закону Ньютона. Очевидно, что закон справедлив, если пространство обладает зеркальной симметрией, использованной нами при перестановке зарядов.

Пример 2.4. **Магнитное поле прямого тока.**

Используем формулу (2.13) для анализа случая, когда переменное электрическое поле отсутствует, т. е. имеются только постоянные поля и токи. Тогда для полного тока, который пересекает поверхность S и пронизывает контур L (см. рис. 2.4), из формулы (2.13) следует выражение

$$\oint_L \vec{B}\, \overrightarrow{dl} = \mu_0 I. \qquad (2.15\text{-а})$$

Применим соотношение (2.15-а) к бесконечно длинному прямолинейному проводнику, по которому течет ток I. В силу осевой симметрии задачи линии индукции магнитного поля являются концентрическими окружностями, расположенными в плоскостях, перпендикулярных току (рис. 2.5). Из формулы (2.15-а) следует равенство

$$B 2\pi r = \mu_0 I,$$

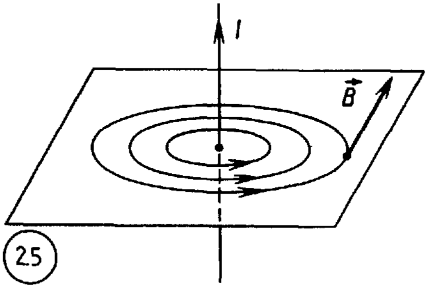
приводящее к формуле

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}. \qquad (2.16)$$

Пример 2.5. **Ток смещения.**

Допустим, что ток через поверхность S равен нулю ($I = 0$). Уравнение (2.13) примет вид

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{1}{c^2} \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \overrightarrow{dS}.$$



2.5

А это значит, что магнитное поле порождается не только токами, но и переменным электрическим полем. Оказывается, что имеет место двухсторонняя связь между электрическим и магнитным полями: переменное магнитное поле порождает электрическое поле, а переменное электрическое поле порождает магнитное поле. Отметим, что эта связь не вполне симметрична, так как знаки у скоростей изменения потока индукции (2.11) и потока напряженности поля (2.13) и (2.14) противоположны.

Указанная закономерность в домаксвелловскую эпоху экспериментально обнаружена не была. Правильно истолковав явление электромагнитной индукции: возникает электрическое поле при изменении магнитного,– великий физик высказал догадку, что существует и обратный процесс: возникает магнитное поле при изменении электрического. Без этой догадки полная система уравнений электромагнетизма не была бы открыта.

Следуя Максвеллу, уравнение (2.3-в) иногда записывают в виде

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_c),$$

где

$$\vec{j}_c = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

– плотность тока смещения. Это некоторый фиктивный ток, вызывающий появление магнитного поля так же, как движение реальных зарядов. На самом деле магнитное поле вызывается переменным электрическим полем.

2.4. Принцип суперпозиции полей. В физике важное значение имеют правила, по которым находятся результирующие эффекты некоторых совместных процессов взаимодействия, если эффекты отдельных взаимодействий известны. Так, в механике существует принцип независимого действия сил, приводящий к правилу их векторного сложения: если на материальную точку действует несколько сил $\vec{F}_i$, то результат действия, т. е. ускорение, определяется их векторной суммой: $m\vec{a} = \sum\limits_i \vec{F}_i$.

В электродинамике речь идет о наложении отдельных электромагнитных полей друг на друга и о нахождении по ним результирующего поля. Пусть в одном случае движущиеся заряды ϱ_1, $\vec{j}_1$ создают поле $\vec{E}_1$, $\vec{B}_1$, в другом случае заряды ϱ_2, $\vec{j}_2$ создают поле $\vec{E}_2$, $\vec{B}_2$ и т. д. Вопрос состоит в том, каким будет поле при наличии в пространстве указанных систем зарядов вместе, при их одновременном действии, выражающемся в создании поля. Ответ на него содержится в уравнениях Максвелла. В силу линейности уравнений (2.3) в рассматриваемом случае *векторы результирующего поля равны сумме векторов составляющих полей:*

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i,$$

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \qquad (2.17)$$

Эти две формулы и выражают принцип суперпозиции полей при наличии нескольких зарядов.

Принцип суперпозиции полей используется в средней школе, например, для вычисления напряженности в некоторой точке поля, созданного двумя точечными зарядами; вычисляют сначала напряженности, которые созданы каждым зарядом в отдельности, а затем их векторно складывают. Аналогично применяется принцип суперпозиции и в более общем случае расчета поля сложной системы движущихся зарядов, находящихся в некотором объеме пространства V. Весь объем разбивается на элементарные объемы dV. С ними связаны бесконечно малые точечные заряды $dQ = \varrho dV$ и элементы тока $\vec{j}dV$. Далее находятся соответствующие этим малым зарядам и токам напряженности $d\vec{E}$ и индукции $d\vec{B}$, а затем они суммируются по всему объему V. Результирующее поле вычисляется по формулам

$$\vec{E} = \int_V d\vec{E}, \ \vec{B} = \int_V d\vec{B},$$

в которых выражения напряженности поля точечного заряда $d\vec{E}$ и индукции поля элементарного тока $d\vec{B}$ находятся сравнительно просто.

Итак, согласно принципу суперпозиции поле системы движущихся зарядов сводится к нахождению полей, связанных с зарядами и токами во всех элементах объема пространства. Но существуют поля и в пространстве без зарядов. Рассмотрим их наложение и в этом случае.

Если в уравнениях (2.3) $\varrho = 0$ и $\vec{j} = 0$, то имеем систему линейных и однородных дифференциальных уравнений в частных производных. Для таких уравнений известно свойство: любая линейная комбинация частных решений есть также решение системы. Пусть имеются частные решения $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$. Дифференциальные уравнения в частных производных допускают бесконечное множество их. Это значит, что физически реализуются, т. е. могут существовать в пространстве, поля с этими характеристиками. Но решением же будут и выражения

$$\vec{E} = \sum_i C_i\vec{E}_i, \qquad \vec{B} = \sum_i C_i\vec{B}_i,$$

где C_i – любые постоянные числа. Таким образом, согласно уравнениям Максвелла физически реализуется, т. е. может существовать в пространстве, и поле с характеристиками $\vec{E}$, $\vec{B}$.

Формулировка принципа суперпозиции для свободного поля состоит в утверждении: *если в пространстве, лишенном электрических зарядов, существуют поля* $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$, то может существовать и поле

$$\vec{E} = \sum_i C_i \vec{E}_i \qquad \vec{B} = \sum_i C_i \vec{B}_i. \tag{2.18}$$

Справедливо и обратное утверждение *любое поле* $(\vec{E}, \vec{B})$ *в пространстве без зарядов можно рассматривать как результат наложения полей* $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$

Важнейшим приложением принципа суперпозиции полей является разложение любого свободного поля в вакууме по плоским монохроматическим волнам. Далее будет показано, что уравнения (2.3) при $\varrho = 0$, $\vec{j} = 0$ допускают решения

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

причем постоянные векторы $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ и $\vec{k}$ взаимно перпендикулярны, $k = \dfrac{\omega}{c}$ Эти решения и выражают плоские волны различной частоты и амплитуды $(\vec{E}, \vec{B})$, распространяющиеся со скоростью c по всевозможным направлениям, задаваемым вектором $\vec{k}$ Согласно принципу суперпозиции любое свободное поле сводится к системе плоских волн различных поляризаций, амплитуд, частот и направлений распространения

2.5. Задачи электродинамики. Как уже говорилось, основная задача электродинамики состоит в отыскании поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ с помощью системы уравнений Максвелла, в которые векторные функции $\vec{E}$ и $\vec{B}$ входят через частные производные первого порядка по координатам и времени. Такое решение возможно, если заданы функции $\varrho = \varrho(\vec{r}, t)$, $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$, т. е. известны плотности заряда и тока во всех точках пространства и во все моменты времени. При интегрировании дифференциальных уравнений систем (2.1–2.3) получатся решения, содержащие некоторые произвольные функции. Такова структура общего решения дифференциальных уравнений в частных производных. Для того чтобы из общего решения найти частное – конкретное поле, необходимо располагать начальными и граничными условиями.

Начальные условия – это значения величин $\vec{E}$ и $\vec{B}$ во всех точках пространства в некоторый момент времени, принимаемый за начальный:

$$\vec{E}\,|_{t=0} = \vec{E}_{\text{нач}}(\vec{r}); \tag{2.20}$$

$$\vec{B}\,|_{t=0} = \vec{B}_{\text{нач}}(\vec{r}), \tag{2.21}$$

т. е. должны быть известны функции координат $\vec{E}_{\text{нач}}(\vec{r})$ и $\vec{B}_{\text{нач}}(\vec{r})$. Тогда значение поля в остальные моменты времени определяется из решения уравнений (2.1–2.3).

Граничные условия – это значения векторов поля на границе области пространства, занимаемой полем. Заданы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ как известные функции времени во всех точках некоторой поверхности:

$$\vec{E}\,|_S = \vec{E}_{\text{гр}}(t); \tag{2.22}$$

$$\vec{B}\,|_S = \vec{B}_{\text{гр}}(t). \tag{2.23}$$

Поле системы зарядов в пустоте не ограничено какими-либо конечными поверхностями. Граничные условия здесь — значения векторов поля при бесконечном удалении от системы зарядов. Физический смысл имеют только те задачи, в которых система зарядов занимает не все бесконечное пространство, а ограниченную его область. Граничные условия в них сводятся к требованию затухания поля при бесконечном удалении от системы зарядов:

$$E|_{r\to\infty}\to 0, \qquad B|_{r\to\infty}\to 0. \tag{2.24}$$

(Иногда формально вводятся системы зарядов в виде бесконечной нити, поверхности и т. д. Эти случаи нуждаются в особом изучении.)

О граничных условиях будет говориться ниже в каждом конкретном случае. В частности, условия (2.24) выполняются для электрического поля точечного заряда (2.7).

Итак, *основная задача электродинамики* состоит в отыскании поля по заданному распределению и движению зарядов при известных начальных и граничных условиях. Оказывается, что при указанных условиях уравнения Максвелла имеют *единственное* решение (см. пример 3.1). В этом смысле задание состояния системы поле-заряды на некоторый начальный момент времени позволяет определить ее состояние во все последующие моменты времени. Прослеживается аналогия с механикой, где по заданному состоянию системы материальных точек в начальный момент времени определяется ее состояние во все другие моменты времени.

Имеет смысл, а также практическое значение задача, *обратная* по отношению к разобранной: по заданному полю определить плотность зарядов и токов. Обратная задача решается с помощью уравнений (2.3-в) и (2.3-г) путем дифференцирования известных функций $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

Кроме названных двух задач, в отдельных случаях может решаться и задача о движении заряженных тел, внесенных в поле. В самом простом случае, если влиянием поля движущихся зарядов на заряды, создающие поле, можно пренебречь, то это обыкновенная задача механики и решается она с помощью уравнения второго закона Ньютона. На заряды действует сила Лоренца, поэтому для заряженной частицы имеем

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q\,[\vec{v}\,\vec{B}], \tag{2.25}$$

где $\vec{p}$ может быть нерелятивистским или релятивистским импульсом

Часто оказывается необходимым найти электромагнитное поле, созданное зарядом, движущимся под действием внешнего поля. Типичный пример — *задача на рассеяние света.* Заряды, входящие в состав вещества, испытывают на себе действие светового электромагнитного поля, приходят в колебания и сами излучают электромагнитные волны — рассеивают свет. В этом случае не учитывается влияние вторичного поля на заряды, создавшие первичное поле (например, расположенные на Солнце), однако само вторичное поле рассматривается наряду с первичным как наложенное на него

В известной мере данной задаче аналогична *задача о поле в веществе*, в которой внешнее поле перераспределяет (изменяет) токи и заряды, входящие в состав вещества, а эти заряды создают поле, накладывающееся на внешнее; образуется измененное по сравнению с начальным поле в веществе.

При решении основной задачи – интегрировании системы уравнений Максвелла – возникают большие математические трудности. Далеко не всегда прямое интегрирование уравнений возможно. Поэтому применяются различные математические методы решения. Так, вместо системы уравнений в дифференциальной форме можно воспользоваться эквивалентными интегральными соотношениями (2.5), (2.8), (2.11), (2.13). При наличии пространственных симметрий в расположении зарядов, при их простых конфигурациях интегральная форма уравнений Максвелла сравнительно просто позволяет получать решения.

При отыскании решений применяется и принцип суперпозиции: если решения для элементов заряда ϱdV и элементов тока $\vec{j}dV$ известны, то решения для непрерывной системы зарядов могут быть записаны в виде интегралов – сумм напряженностей и индукций полей, созданных элементами системы зарядов. Используются и другие методы решения системы уравнений Максвелла, о которых речь пойдет в курсе далее (метод потенциалов). По существу, все содержание электродинамики связано с решениями системы уравнений Максвелла для тех или иных систем зарядов.

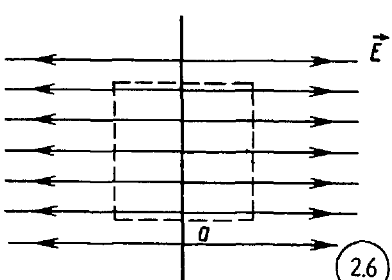
Пример 2 6 **Применение теоремы Гаусса.**

Найдем поле равномерно заряженной плоской поверхности с помощью теоремы Гаусса (2 5) Поверхностная плотность электрических зарядов постоянна и равна σ В силу симметрии поля относительно заряженной поверхности линии напряженности должны быть перпендикулярны поверхности, а поле должно быть однородным (рис 2 6) Выделяя замкнутую поверхность в виде поверхности куба и вычисляя поток вектора $\vec{E}$, имеем

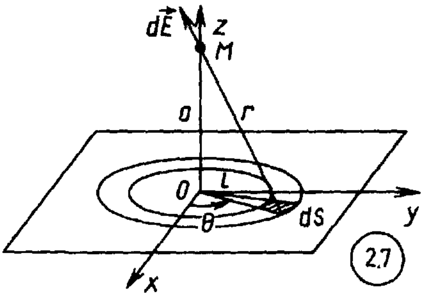
$$2Ea^2 = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0},$$

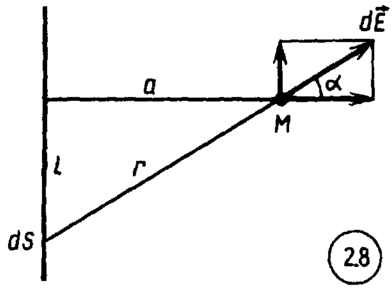
откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



2.6





Пример 2.7. **Расчет напряженности с помощью принципа суперпозиции.**

Найдем то же поле. Элемент поверхности (рис. 2.7, 2.8) $dS = ldld\vartheta$ несет заряд $dQ = \sigma dS$. Он создает поле, напряженность которого в точке M находится с помощью формулы (2.7). Для модуля вектора $d\vec{E}$ получим

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{l\sigma dld\vartheta}{4\pi\varepsilon_0(l^2 + a^2)}.$$

Вклад в результирующее поле дает только перпендикулярная к поверхности составляющая:

$$dE_\perp = dE\cos\alpha = \frac{\sigma ladld\vartheta}{4\pi\varepsilon_0(a^2 + l^2)^{3/2}}.$$

Поле, созданное всей поверхностью, имеет напряженность:

$$E = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sigma ladld\vartheta}{4\pi\varepsilon_0(a^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Интеграл взят с помощью подстановки $y = a^2 + l^2$. Составляющая поля, направленная вдоль поверхности, равна нулю. Действительно, всякой точке A можно указать симметричную ей точку плоскости B (см. рис. 2.7). Совокупный вклад зарядов точек A и B в параллельную этой поверхности составляющую напряженности $\vec{E}_\parallel$ равен нулю.

2.6. Уравнения Максвелла – Лоренца. Принцип причинности в электродинамике. Обсудим следующую общую задачу электродинамики.

Имеется замкнутая изолированная система зарядов и электромагнитного поля в вакууме. В начальный момент состояние системы задано, т. е. заданы положения и скорости заряженных частиц, векторы поля. Требуется определить (с помощью теоретических расчетов) состояние системы во все последующие моменты времени. Решение этой задачи следует искать в синтезе уравнений Максвелла и Ньютона: определяем последовательно общее поле системы, находим силы, действующие на заряды, кинематические уравнения движения зарядов, по ним снова определяем поле и т. д.

В общем случае такая задача некорректна и требует ограничений в постановке.

Во-первых, не всегда возможно выделить изолированную систему, так как существует излучение электромагнитных волн или волны могут приходить в систему извне. Следует предположить, что внешние источники волн отсутствуют, а сама система рассматривается без излучения или на протяжении ограниченных интервалов времени, за которые ни заряды, ни поля не выходят за пределы некоторого конечного объема пространства.

Во-вторых, при ускоренном движении зарядов возникают силы «радиационного трения», которые нельзя учесть средствами механики. Этот вопрос будет специально обсужден в § 11, п. 11.1, а пока предположим, что указанными силами можно пренебречь.

В-третьих, чтобы изучать движение зарядов с помощью законов механики, необходимо использовать некоторые механические модели тел, на которых расположены заряды. В простейшем случае это свободные от связей материальные точки с массами m_i, расположенные в точках пространства $\vec{r}_i(t)$.

Для плотности зарядов и плотности токов, связанных с зарядами, справедливы выражения (см. § 1, п. 1.1)

$$\varrho_i = q_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i), \qquad \vec{j}_i = q_i\,\dot{\vec{r}}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i). \tag{2.25-а}$$

Согласно принципу суперпозиции поле найдется как сумма полей отдельных зарядов:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i, \qquad \vec{B}_i = \sum_i \vec{B}_i. \tag{2.25-б}$$

Учитывая линейность операций div и rot, с помощью формул (2.25-а) и (2.25-б) запишем уравнения Максвелла (2.1) для нашей системы в виде

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\sum\limits_i q_i\,\dot{\vec{r}}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i), \\ \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_i q_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i). \end{cases} \tag{2.26}$$

К уравнениям (2.26) нужно добавить уравнения движения материальных точек под действием силы Лоренца (предполагается, что других сил нет). Согласно уравнениям (2.25)

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = q_i\vec{E} + q_i\,[\dot{\vec{r}}_i\,\vec{B}]. \tag{2.27}$$

Совокупность формул (2.26) и (2.27) носит название *уравнений Максвелла—Лоренца для системы зарядов и поля в вакууме.* В принципе они (при указанных выше ограничениях) отвечают на вопрос о движении зарядов и изменениях поля с течением времени и позволяют определить состояние системы по начальным условиям. На основании этих соотношений считают, что электродинамика является теорией с динамическими закономерностями. Так же, как и в механике, в электродинамике справедлив принцип причинности:

состояние системы поле-заряды в некоторый момент времени однозначно определяет состояние системы во все последующие (или предшествующие) моменты времени.

Однако точные решения системы уравнений Максвелла—Лоренца неизвестны даже при небольшом числе материальных точек. В практических задачах, например в физике плазмы, используются разнообразные приближенные методы. Уравнения (2.26), (2.27) служат также принципиальной основой при изучении электромагнитного поля в веществе.

Следует заметить, что уравнения Максвелла—Лоренца применяются к некоторой *макроскопической* механической системе зарядов, дополненной непрерывным полем. (Такой системой могут быть система точек, заряженная сплошная среда с теми или иными механическими свойствами, система заряженных тел и т. д.). Применение же этих уравнений к системе заряженных элементарных частиц в общем случае неправомерно в силу квантовых закономерностей их движения и взаимодействия.

Говоря о системе уравнений Максвелла—Лоренца, специально заметим, что взятые сами по себе уравнения Максвелла (2.1) описывают связь между полем и системой зарядов, движущихся не только под действием сил поля, но и любых других сил. Вообще, уравнения движения в систему не входят, так что это движение может быть произвольным и ограничено только условием сохранения заряда (1.6). Физически это значит, что нельзя отнести расположение и движение зарядов к действию на них только поля, созданного ими. Но что же еще определяет движение зарядов, кроме электромагнитного поля? Мы отвлеклись, рассматривая систему зарядов в вакууме, от их материального носителя—вещества, в состав которого они входят. На тела могут действовать гравитационные силы. Силы упругости, трения и др., хотя и имеют электромагнитную природу, в макроскопическом плане законами электродинамики Максвелла не описываются. Внутри же тел движение и взаимодействие микроскопических зарядов не подчиняются ни классической механике, ни классической электродинамике.

Среди сил, действующих на заряды, выделим силы непосредственного воздействия электромагнитного поля. Все остальные получили общее название—*сторонние* силы. Важно отметить, что и при наличии сторонних сил поле зарядов определяется уравнением Максвелла. Поэтому в системе уравнений Максвелла постановка вопроса о движении зарядов шире, чем в системе Максвелла—Лоренца.

§ 3. Энергия и импульс электромагнитного поля

3.1. Работа, совершаемая полем при перемещении зарядов. Энергия и импульс—величины, универсальные для всех физических объектов, присущи и электромагнитному полю. Однако определения