состояние системы поле-заряды в некоторый момент времени однозначно определяет состояние системы во все последующие (или предшествующие) моменты времени.

Однако точные решения системы уравнений Максвелла – Лоренца неизвестны даже при небольшом числе материальных точек. В практических задачах, например в физике плазмы, используются разнообразные приближенные методы. Уравнения (2.26), (2.27) служат также принципиальной основой при изучении электромагнитного поля в веществе.

Следует заметить, что уравнения Максвелла – Лоренца применяются к некоторой *макроскопической* механической системе зарядов, дополненной непрерывным полем. (Такой системой могут быть система точек, заряженная сплошная среда с теми или иными механическими свойствами, система заряженных тел и т. д.). Применение же этих уравнений к системе заряженных элементарных частиц в общем случае неправомерно в силу квантовых закономерностей их движения и взаимодействия.

Говоря о системе уравнений Максвелла – Лоренца, специально заметим, что взятые сами по себе уравнения Максвелла (2.1) описывают связь между полем и системой зарядов, движущихся не только под действием сил поля, но и любых других сил. Вообще, уравнения движения в систему не входят, так что это движение может быть произвольным и ограничено только условием сохранения заряда (1.6). Физически это значит, что нельзя отнести расположение и движение зарядов к действию на них только поля, созданного ими. Но что же еще определяет движение зарядов, кроме электромагнитного поля? Мы отвлеклись, рассматривая систему зарядов в вакууме, от их материального носителя – вещества, в состав которого они входят. На тела могут действовать гравитационные силы. Силы упругости, трения и др., хотя и имеют электромагнитную природу, в макроскопическом плане законами электродинамики Максвелла не описываются. Внутри же тел движение и взаимодействие микроскопических зарядов не подчиняются ни классической механике, ни классической электродинамике.

Среди сил, действующих на заряды, выделим силы непосредственного воздействия электромагнитного поля. Все остальные получили общее название – *сторонние* силы. Важно отметить, что и при наличии сторонних сил поле зарядов определяется уравнением Максвелла. Поэтому в системе уравнений Максвелла постановка вопроса о движении зарядов шире, чем в системе Максвелла – Лоренца.

§ 3. Энергия и импульс электромагнитного поля

3.1. Работа, совершаемая полем при перемещении зарядов. Энергия и импульс – величины, универсальные для всех физических объектов, присущи и электромагнитному полю. Однако определения кинетической и потенциальной энергии, а также импульса, данные в механике (см. [1]) для материальной точки и системы точек, отнюдь не распространяются на новый физический объект – поле. Об энергии и импульсе электромагнитного поля можно судить, опираясь на соответствующие механические величины, на законы сохранения энергии и импульса для замкнутой изолированной системы, состоящей из электомагнитного поля и электрически заряженных материальных точек. В общий баланс энергии, кроме кинетической энергии материальных точек, войдет и новая для механики величина, которую следует отождествить с энергией поля. Аналогично ставится вопрос и об импульсе поля.

Итак, рассмотрим систему заряженных материальных точек, взаимодействующих между собой. Такая система описывается уравнениями Максвелла – Лоренца (2.26) и (2.27). Пользуясь этими уравнениями, распространим понятия энергии и импульса на поле, находя величины, сохраняющиеся для изолированной системы поле-заряды.

Макроскопические электрические заряды так или иначе связаны с материальными телами, на которых они расположены. Пусть частица массой m_i несет на себе заряд q_i. Тогда уравнение движения (2.27) приводится к интегралу энергии обычным для механики способом. Умножим обе части равенства на $d\vec{r}_i$. Получим

$$d\vec{r}_i \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = q_i \vec{E}_i d\vec{r}_i.$$

Здесь справа стоит работа силы Лоренца. Она совершается только ее электрической составляющей, так как работа магнитной составляющей равна нулю в силу коллинеарности векторов $\vec{v}_i$ и $d\vec{r}_i$:

$$q_i [\vec{v}_i \vec{B}]\, d\vec{r}_i = 0.$$

Левую часть преобразуем с помощью легко проверяемого тождества

$$\vec{v} d \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = d \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

и окончательно получаем

$$d \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = q_i \vec{E}_i d\vec{r}_i. \tag{3.1}$$

Элементарная работа силы Лоренца равна приросту релятивистской (кинетической) энергии заряженной материальной точки.

Просуммируем теперь элементарные работы по всем точкам системы:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \sum_i q_i \vec{E}_i \vec{v}_i. \tag{3.2}$$

Формула (3.2) выражает теорему об изменении энергии системы материальных точек за счет работы поля, совершенной над ними. Мы вывели формулу (3.2) в предположении о точечных зарядах — заряженных материальных точках. Она легко обобщается на непрерывно распределенный по пространству заряд. Для работы поля в единицу времени в таком случае с помощью формулы (1.3) имеем

$$P = \int_V \vec{E}\vec{j}dV. \tag{3.2-а}$$

Отсюда работа в единицу времени в единице объема — плотность мощности, высвобождаемой полем,— выразится формулой

$$P_0 = \vec{E}\vec{j}. \tag{3.3}$$

Формула (3.2-а) и (3.3) для работы поля нужны потому, что система уравнений Максвелла обычно используется для модели непрерывно распределенных по пространству зарядов. Что же касается механической модели носителей зарядов, то нам в данном случае удобнее использовать дискретную модель заряженных частиц (в соответствии с левой частью формулы (3.2)).

Итак, за счет работы поля изменяется кинетическая энергия находящихся в поле заряженных частиц. Это свидетельствует о наличии у поля энергии и превращении ее в кинетическую энергию частиц.

3.2. Энергия электромагнитного поля. Плотность и поток энергии. Закон изменения энергии. Поставим задачу: найти энергию электромагнитного поля по заданным векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Для ее решения используем уравнения Максвелла и выражение для работы поля над зарядами(3.2-а). Выпишем уравнения (2.1-а) и (2.1-в):

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}.$$

Умножим первое из них на $\frac{1}{\mu_0}\vec{B}$, а второе — на $\vec{E}$. Перейдем к соотношениям

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \tag{а}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\operatorname{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}\vec{E}. \tag{б}$$

Теперь из равенства (б) вычтем равенство (а) и получим

$$\varepsilon_0\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\operatorname{rot}\vec{B} - \vec{B}\operatorname{rot}\vec{E}\right) - \vec{j}\vec{E}. \tag{в}$$

Применяя векторное тождество (П. II, 31), можно упростить запись правой части выражения (в):

$$-\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\operatorname{rot}\vec{B}-\vec{B}\operatorname{rot}\vec{E})=\frac{1}{\mu_0}\operatorname{div}[\vec{E}\,\vec{B}].$$

Кроме того, учтем, что левую часть того же выражения можно представить в виде частной производной по времени от функции $\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)$. Таким образом, имеем

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)=\frac{1}{\mu_0}\operatorname{div}[\vec{E}\,\vec{B}\,]+\vec{j}\,\vec{E}. \tag{3.4}$$

Чтобы выяснить физический смысл формулы (3.4) и входящих в нее слагаемых, полезно перейти к соответствующему интегральному соотношению.

Проинтегрируем выражение (3.4) по объему пространства V. Затем изменим порядок дифференцирования и интегрирования в левой части полученного равенства, а также преобразуем первое слагаемое в правой части с помощью теоремы Гаусса. В итоге получим

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)dV=\oint\limits_S\frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\,\vec{B}]\,\overrightarrow{dS}+\int\limits_V\vec{j}\,\vec{E}\,dV. \tag{3.5}$$

Интеграл

$$P=\int\limits_V\vec{j}\,\vec{E}\,dV$$

есть работа поля за единицу времени в пределах конечного объема V. Это дает основание для введения фундаментальных величин:

$$w=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right) \tag{3.6}$$

— плотности энергии поля и

$$\vec{\sigma}=\frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\,\vec{B}] \tag{3.7}$$

— плотности потока энергии (вектор Умова – Пойнтинга).

Выражение

$$W=\int\limits_V\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)dV \tag{3.8}$$

определяет энергию поля в заданном объеме, а интеграл

$$N=\oint\limits_S\frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\,\vec{B}]\,\overrightarrow{dS} \tag{3.9}$$

истолковывается как поток энергии через замкнутую поверхность за единицу времени. Фактически это *полная мощность* или *интенсивность излучения* системы зарядов.

После раскрытия смысла входящих в формулу (3.5) величин можно понять и ее общее содержание: равенство (3.5) оказывается математическим выражением закона изменения энергии электромагнитного поля. Если применить введенные обозначения (3.2-а), (3.6) – (3.9), то формула (3.5) принимает вид

$$-dW = Ndt + Pdt \qquad (3.10)$$

(Так как W не зависит от координат точек поля, частную производную в формуле (3 5) можно заменить обыкновенной) Теорема читается: *убыль энергии поля в некотором объеме равна потоку энергии, выходящему из объема, и работе, совершаемой полем над зарядами в этом объеме.*

На практике используется не только интегральная форма теоремы (3.5) или (3.10), но часто и первоначальная дифференциальная форма теоремы (3.4) Во введенных обозначениях для нее имеем

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{\sigma} + \vec{j}\vec{E} \qquad (3.11)$$

Плотность энергии w связана с непрерывным заполнением пространства электромагнитным полем Изменение поля в различных точках пространства – изменение векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ во времени – связано с перетеканием энергии поля из одних мест в другие Вот это-то движение энергии и учитывается с помощью вектора Умова – Пойнтинга (3 7)

Если зарядов нет, то равенство (3 11) приобретает вид

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{\sigma}$$

и выражает закон сохранения энергии свободного электромагнитного поля При наличии зарядов имеет место взаимодействие, обусловливающее обмен энергией между зарядами и полем Согласно выражению (3 11) движущиеся заряды можно рассматривать как источники энергии поля Тогда плотность мощности источника равна $\vec{j}\vec{E}$

Пусть потока энергии через границы поля нет В таком случае

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{j}\vec{E}$$

и энергия поля убывает, если $\vec{j}\vec{E} > 0$, т е заряды движутся под действием сил поля Если же $\vec{j}\vec{E} < 0$, то энергия поля растет, но в этом случае работают не силы поля, а сторонние силы, не сводящиеся к силе Лоренца Простейший пример, иллюстрирующий это явление, состоит в разделении сторонними силами разноименных зарядов, увеличении расстояния между ними, что приводит к увеличению энергии поля Энергия поля может изменяться (возрастать или убывать) и за счет убыли или роста кинетической энергии входящих в систему зарядов, что также описывается величиной $\vec{j}\vec{E}$, если заряды тормозятся, то ($\vec{j}\vec{E} < 0$) энергия поля растет, если же заряды ускоряются, то ($\vec{j}\vec{E} > 0$) энергия поля убывает (Связь энергии поля и механической энергии зарядов разобрана ниже в § 3, п 3 3)

Пример 3 1 **Единственность решения уравнений Максвелла.**

Используем выражение для энергии поля (3 8) в доказательстве единственности решения системы уравнений Максвелла при заданных ϱ и $\vec{j}$ Предположим противное Пусть имеется два решения ($\vec{E}_1$, $\vec{B}_1$) и ($\vec{E}_2$, $\vec{B}_2$) при одних и тех же начальных и граничных условиях В силу линейности уравнений их разность ($\vec{E}' = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$ и $\vec{B}' = \vec{B}_1 - \vec{B}_2$) будет тоже решением системы, но при нулевых начальных и граничных условиях и при нулевых значениях ϱ и $\vec{j}$ Например, из соотношений

$$\operatorname{div}\vec{E}_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho, \quad \operatorname{div}\vec{E}_2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

следует $$\operatorname{div}(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

Поле ($\vec{E}'$, $\vec{B}'$) создает нулевой поток энергии через граничную поверхность (в силу нулевых граничных условий), и поэтому его энергия W' изменяться не может (заряды и токи отсутствуют) В начальный момент $W' = 0$, а поэтому W' равна нулю и во все последующие моменты времени Однако равенство

$$\frac{1}{2}\int_V \left(\varepsilon_0 E'^2 + \frac{1}{\mu_0} B'^2\right) dV = 0$$

выполняется только при $\vec{E}' = 0$ и $\vec{B}' = 0$ Но тогда $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ и $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$, решение единствен ное

3.3. Закон сохранения энергии для изолированной системы поле-заряды. Рассмотрим *изолированную систему* поле-заряды. В соответствии с формулой (3.8) убыль энергии поля для некоторого конечного объема V равна выходящему через его поверхность потоку энергии и работе электрических сил над зарядами Но изолированность системы следует понимать как отсутствие потока энергии через ограничивающую ее поверхность (и отсутствие потока массы, который тоже уносил бы энергию). В таком случае формула (3.5) дает

$$-\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) dV = \int_V \vec{j}\vec{E} dV. \qquad (3.12)$$

Работа, совершаемая полем над зарядами в изолированной системе, равна убыли энергии электромагнитного поля в ней.

Вопрос об изолированности системы поле-заряды уже обсуждался в § 2, п 2 6 Вернемся к нему снова, так как теорема об изменении энергии поля позволяет освободиться от ограничения, связанного с конечностью объема V

Допустим, что в пределе $r \to \infty$ выполняются условия

$$E \sim \frac{1}{r^\alpha}, \qquad B \sim \frac{1}{r^\beta},$$

где α и β – положительные числа Поток энергии N через поверхность сферы весьма большого радиуса R

$$N \sim EBS \sim \frac{R^2}{R^{\alpha+\beta}}$$

При $R \to \infty$ он обращается в нуль, если $\alpha + \beta > 2$

Таким образом, для выполнения условия изолированности системы достаточным является условие убыли E и B быстрее, чем $\frac{1}{r}$ В таком случае слагаемое, выражающее поток энергии, исчезает, если рассматривать все бесконечное пространство, из соотно шения (3 5) получаем

$$-\frac{d}{dt}\int_\infty \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) dV = \int_\infty \vec{j}\vec{E} dV \qquad (3\ 13)$$

Вернемся к формуле (3.12). Ясно, что работа, производимая над зарядами, является мерой превращения энергии поля в другие виды (какие конкретно, это зависит от модели вещества, с которым связаны заряды): в кинетическую энергию заряженных частиц или тел, потенциальную энергию деформации, внутреннюю энергию среды и т д. В рамках рассматриваемой (простейшей) модели свободных заряженных материальных точек энергия поля переходит в кинетическую энергию частиц, как это следует из выражений (3.1) и (3.2). При дискретном распределении зарядов интеграл в правой части формулы (3 13) заменяется суммой

$$\sum_i q_i \vec{v}_i \vec{E}_i,$$

тогда согласно формуле (3.2) получаем равенство

$$-\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)dV = \frac{d}{dt}\sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}},$$

из которого следует

$$\int_V \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_o}B^2\right)dV + \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}. \tag{3.14}$$

В равенстве (3.14) объем V может быть конечным или охватывать все бесконечное пространство. Это соотношение выражает закон сохранения энергии в изолированной системе поле-заряды и читается следующим образом: *в изолированной системе сохраняется сумма энергии поля и релятивистской энергии заряженных материальных точек.*

Если объем бесконечен, то достаточно, чтобы выполнялось условие $E \sim \frac{1}{r^2}$, $B \sim \frac{1}{r^2}$ при $r \to \infty$. Тогда система поле-заряды может считаться изолированной. Как будет показано далее, данное условие, как правило, выполняется для конечных по размерам систем зарядов.

В § 2, п 2.5. затухание на бесконечности вводилось как граничное условие для полей в вакууме. Как сейчас становится очевидным, этим требованием обеспечивается конечность значений энергии рассматриваемых в электродинамике систем зарядов. Только такие системы имеют физический смысл.

В методическом плане существенно обратить внимание на формулу (3 14) еще в одном аспекте полная энергия системы поле заряды складывается из механической энергии материальных точек с массами m_i и энергии поля Никакой потенциальной энергии взаимодействия зарядов между собой или зарядов и поля в формуле нет Формула остается справедливой, если связи между полем и зарядами нет материальные точки не заряжены, а поле свободно Отсутствие потенциальной энергии взаимодействия – прямое следствие замены механической модели дальнодействия на полевую А если нет взаимодействия на расстоянии, то нет и энергии этого взаимодействия В концепции близкодействия энергия приписывается только материальным объектам – телам, частицам, полю В главе II будет показано, что в отдельных случаях (для статических полей) энергия поля может быть формально представлена как потенциальная энергия взаимодействия зарядов Потенциальная энергия по своей природе всегда сводится к энергии поля – это фактически значение энергии поля, отсчитанное от некоторого уровня

3.4. Импульс электромагнитного поля. Закон сохранения импульса. Выражение для импульса электромагнитного поля получим тем же методом, что и для энергии: образуем интеграл импульса для уравнения (2.25), привлекая уравнения поля (2.1).

Просуммируем все уравнения движения для заряженных материальных точек системы:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{m_i\vec{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} = \sum_i (q_i\vec{E}_i + q_i[\vec{v}_i\vec{B}_i]).$$

Считая распределение зарядов по пространству непрерывным, заменим сумму справа интегралом по объему системы:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{m_i\vec{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} = \int_V \{\varrho\vec{E} + [\vec{j}\vec{B}]\}\,dV. \qquad (3\ 15)$$

Преобразуем теперь подынтегральное выражение с помощью уравнений Максвелла, подставляя соответствующие выражения вместо ϱ и $\vec{j}$

$$\varrho\vec{E} + [\vec{j}\vec{B}] = \varepsilon_0\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \varepsilon_0\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\vec{B}\right] + \frac{1}{\mu_0}[\mathrm{rot}\,\vec{B}\cdot\vec{B}]. \qquad (3.15\text{-а})$$

Чтобы в правой части равенства (3.15-а) получить производную по времени от некоторой величины, дополним ее слагаемыми:

$$-\varepsilon_0\left[\vec{E}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right] - \varepsilon_0[\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}].$$

От этого равенство не нарушится, так как согласно уравнению (2.1-а) указанное выражение всегда равно нулю. Кроме того, добавим еще член, равный нулю:

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{B}.$$

Далее, группируя члены в правой части соотношения (3 15-а), получим

$$\varrho\vec{E} + [\vec{j}\vec{B}] = -\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0[\vec{E}\vec{B}] + \varepsilon_0(\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - [\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}]) + \frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{B} -$$
$$- [\vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}]).$$

Это выражение позволяет записать формулу (3.15) в виде

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{m_i\vec{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \varepsilon_0[\vec{E}\vec{B}]\,dV + \int_V (\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - [\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}])\,dV +$$
$$+ \frac{1}{\mu_0}\int_V (\vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - [\vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}])\,dV. \qquad (3.15\text{-б})$$

Идея дальнейших преобразований состоит в том, что второй и третий интегралы в равенстве (3.15-б) сводятся к поверхностным и они исчезают, когда интегрирование распространяется на все пространство, т. е. когда мы имеем дело с изолированной системой поле-заряды (см П. IV). В результате получаем соотношение

$$\frac{d}{dt}\sum \frac{m_i\vec{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} + \frac{d}{dt}\int_V \varepsilon_0\,[\vec{E}\,\vec{B}]\,dV = 0,$$

из которого вытекают закон сохранения импульса для изолированной системы поле-заряды:

$$\sum_i \frac{m_i\vec{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} + \int_V \varepsilon_0\,[\vec{E}\,\vec{B}]\,dV = \text{const}. \tag{3.16}$$

Величину под интегралом обозначают через $\vec{g}$, т. е

$$\vec{g} = \varepsilon_0\,[\vec{E}\,\vec{B}]. \tag{3.17}$$

Эта величина должна быть отождествлена с плотностью импульса поля.

Введем еще один энергетический параметр – плотность энергии в потоке $\tilde{w}$ Если движение энергии происходит со скоростью c, то произведение $\tilde{w}c$ дает нам плотность потока энергии Иными словами,

$$\tilde{w} = \frac{o}{c}$$

Используя соотношение (3 7), получим для электромагнитного поля

$$\tilde{w} = \frac{1}{\mu_0 c}\,|[\vec{E}\,\vec{B}]| \tag{3 18}$$

Сопоставляя выражения (3 17) и (3 18), находим, что

$$\tilde{w} = cg$$

Таким образом, для энергии электромагнитного поля, распространяющегося в про странстве со скоростью c, существует такая же связь между энергией и импульсом, какая характерна для релятивистских безмассовых частиц $\varepsilon = cp$

В то же время очевидно, что для всей энергии поля такое соотношение не выполняется И лишь в частном случае электромагнитных волн (см главу III) соотношение (3 18) справедливо для всей энергии поля, ибо вся она в этом случае участвует в потоке

Взаимодействие между заряженными материальными точками осуществляется посредством поля. Это приводит к несохранению импульса замкнутой механической системы материальных точек, если система обменивается импульсом с полем так, что импульс поля изменяется. Как следствие, в такой системе может не выполняться третий закон Ньютона, или равенство нулю главного вектора внутренних сил Например, излучающее, рассеивающее, отражающее или поглощающее электромагнитные волны тело испытывает со стороны поля действия силы, так как импульс тела изменяется, но эта сила не имеет противодействующей: к полю не может быть приложена сила.

Обладая импульсом, электромагнитное поле оказывает давление на тела, с которыми взаимодействует Теория Максвелла предсказала давление света, рассматривая свет как электромагнитные волны. Экспериментально световое давление было обнаружено П. Н. Лебедевым в 1899 г , блестяще подтвердившим правильность теории Максвелла.

П р и м е р 3 2 **Вычисление плотности энергии, плотности потока энергии и плотности импульса в плоской монохроматической волне (2.19)**

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) = \left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0}\right)\cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t),$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\,\vec{B}] = \frac{\vec{k}}{\mu_0 k} E_0 B_0 \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t),$$

$$\vec{g} = \varepsilon_0 [\vec{E}\,\vec{B}] = \frac{\vec{k}\,\varepsilon_0}{k} E_0 B_0 \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

Плотность энергии в потоке при скорости ее движения c равна $\frac{\sigma}{c}$, откуда $g = \frac{\tilde{w}}{c}$ В потоке движется вся энергия, если $w = \tilde{w}$ или

$$\left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0}\right)c = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0,$$

что возможно при

$$\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{B_0}{2\mu_0}$$

Отсюда

$$E_0 = cB_0$$

§ 4. Уравнения для потенциалов электромагнитного поля

4.1. Потенциалы электромагнитного поля. Для решения основной задачи электродинамики – нахождения поля – необходимо проинтегрировать уравнения Максвелла Как уже указывалось, задача прямого интегрирования уравнений во многих конкретных случаях наталкивается на значительные математические трудности Затруднительным оказывается и теоретический анализ особенностей электромагнитного поля по многим важным вопросам. Трудности в значительной мере преодолеваются при сведении уравнений поля в первых производных (система Максвелла) к хорошо изученным в математике уравнениям второго порядка путем введения вспомогательных величин – потенциалов поля.

Любое векторное поле математически определяется полностью, если заданы его дивергенция и ротор. Поэтому система уравнений Максвелла (2 1) является полной. в ней ротор и дивергенция векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ определяются распределением зарядов и токов.

Напомним, что поле, для которого не равна нулю дивергенция, но равен нулю ротор, называется полем источников или потенциальным полем Линии его начинаются и оканчиваются на электрических зарядах – источниках поля. Поле, для которого не равен нулю ротор, но равна нулю дивергенция, называется вихревым или соленоидальным Линии такого поля замкнутые кривые В общем случае векторное поле может быть представлено суммой потенциальной и вихревой составляющих.