П р и м е р 3 2 **Вычисление плотности энергии, плотности потока энергии и плотности импульса в плоской монохроматической волне (2.19)**

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) = \left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0}\right)\cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t),$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\,\vec{B}] = \frac{\vec{k}}{\mu_0 k} E_0 B_0 \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t),$$

$$\vec{g} = \varepsilon_0[\vec{E}\,\vec{B}] = \frac{\vec{k}\,\varepsilon_0}{k} E_0 B_0 \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

Плотность энергии в потоке при скорости ее движения c равна $\frac{\sigma}{c}$, откуда $g = \frac{\tilde{w}}{c}$ В потоке движется вся энергия, если $w = \tilde{w}$ или

$$\left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0}\right)c = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0,$$

что возможно при

$$\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{B_0}{2\mu_0}$$

Отсюда

$$E_0 = cB_0$$

§ 4. Уравнения для потенциалов электромагнитного поля

4.1. Потенциалы электромагнитного поля. Для решения основной задачи электродинамики – нахождения поля – необходимо проинтегрировать уравнения Максвелла Как уже указывалось, задача прямого интегрирования уравнений во многих конкретных случаях наталкивается на значительные математические трудности Затруднительным оказывается и теоретический анализ особенностей электромагнитного поля по многим важным вопросам. Трудности в значительной мере преодолеваются при сведении уравнений поля в первых производных (система Максвелла) к хорошо изученным в математике уравнениям второго порядка путем введения вспомогательных величин – потенциалов поля.

Любое векторное поле математически определяется полностью, если заданы его дивергенция и ротор. Поэтому система уравнений Максвелла (2 1) является полной. в ней ротор и дивергенция векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ определяются распределением зарядов и токов.

Напомним, что поле, для которого не равна нулю дивергенция, но равен нулю ротор, называется полем источников или потенциальным полем Линии его начинаются и оканчиваются на электрических зарядах – источниках поля. Поле, для которого не равен нулю ротор, но равна нулю дивергенция, называется вихревым или соленоидальным Линии такого поля замкнутые кривые В общем случае векторное поле может быть представлено суммой потенциальной и вихревой составляющих.

Обратимся к электромагнитному полю, описываемому системой уравнений Максвелла (2.1) или (2.3). Уравнения (б) и (в) системы показывают, что магнитная составляющая имеет чисто вихревой характер. Уравнение (б) $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ удовлетворяется тождественно, если ввести некоторую вспомогательную функцию $\vec{A}(\vec{r}, t)$, определяемую условием:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{4.1}$$

В самом деле,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} \equiv 0.$$

Вектор $\vec{A}$ называют *векторным потенциалом* электромагнитного поля. Если он найден, то дифференцированием определяется $\vec{B}$. Прямой физический смысл имеет вектор $\vec{B}$ – это измеряемая величина, а векторный потенциал $\vec{A}$ – вспомогательная величина, на опыте непосредственно не измеряющаяся.

Электрическая напряженность поля, как показывают уравнения (а) и (г), имеет вихревую и потенциальную составляющие. Подберем вспомогательную величину – скалярный потенциал электромагнитного поля – так, чтобы тождественно удовлетворялось первое уравнение системы Максвелла. Подстановка выражения (4.1) в уравнение (а) дает

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Это соотношение удовлетворяется тождественно, если положить

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi, \tag{4.2}$$

где $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ – *скалярный потенциал* поля.

Если $\varphi(\vec{r}, t)$ и $\vec{A}(\vec{r}, t)$ известны, то $\vec{E}$ однозначно определяется указанными в (4.2) операциями дифференцирования.

Итак, с помощью определений (4.1) и (4.2) вместо векторов поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ можно ввести потенциалы φ и $\vec{A}$, однозначно определяющие электромагнитное поле (и уменьшающее число уравнений системы Максвелла до двух независимых). Однако из дифференциальных уравнений (4.1) и (4.2) по заданным $\vec{E}$ и $\vec{B}$ сами потенциалы поля φ и $\vec{A}$ определяются не однозначно, а с точностью до некоторой произвольной функции, так как потенциалы входят в эти уравнения под знаком частных производных. (Общее решение дифференциального уравнения в частных производных содержит произвольные функции независимых переменных.) Неоднозначность выбора потенциалов используется далее для упрощения уравнений поля в потенциалах и для упрощения расчетов в конкретных задачах.

Используем вместо $\vec{A}$ и φ другие потенциалы $\vec{A}'$ и φ', связанные с $\vec{A}$ и φ равенствами.

$$\left.\begin{aligned} A' &= \vec{A} + \operatorname{grad}\psi, \\ \varphi' &= \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

где $\psi = \psi(\vec{r},\ t)$ – произвольная функция

Найдем векторы поля, соответствующие потенциалам (4.3):

$$\operatorname{rot}\vec{A}' = \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B},$$

$$-\operatorname{grad}\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}.$$

Вычисления показали, что векторный потенциал определен соотношениями (4.1) и (4.2) с точностью до градиента произвольной функции ψ, а скалярный – с точностью до производной по времени этой же функции. Но с физической точки зрения такая неоднозначность в определении потенциалов поля несущественна. Векторный и скалярный потенциалы в общем случае величины, физически не измеряющиеся; они вводятся как вспомогательные в целях математического удобства.

Пример 4.1. **Потенциальное поле точечного заряда.**

Покажем, что поле точечного электрического заряда описывается потенциалом

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r} + C,$$

где C – константа.

Находя напряженность по формуле (4.2), получаем известное выражение (2.7)

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}.$$

Пример 4.2. **Векторный потенциал однородного поля.**

Покажем, что однородное магнитное поле может быть описано векторным потенциалом

$$\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{B}\,\vec{r}],$$

где $\vec{B}$ – постоянный во всех точках пространства вектор. Действительно, с помощью формулы 30 из приложения II имеем

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}[\vec{B}\,\vec{r}] = \frac{1}{2}(-\vec{B} + 3\vec{B}) = \vec{B}.$$

4.2. Уравнения электромагнитного поля в потенциалах. Задача, поставленная в начале параграфа, состоит в придании системе уравнений Максвелла новой математической формы. Это достигается переходом от векторов поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ к потенциалам поля φ и $\vec{A}$. Для получения уравнений поля в потенциалах выполним подстановку выражений (4.1) и (4.2) в уравнения Максвелла (2.3). Первая пара уравнений удовлетворяется тождественно (и далее не рассматривается). Уравнения (2.3-в) и (2.3-г) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} &= -\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\operatorname{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu_0\vec{j}, \\ \Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Первое из этих уравнений преобразуем, используя тождество (П. II, 27) и группируя члены:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial c}\right).$$

Полученное уравнение можно упростить, пользуясь неоднозначностью в выборе потенциалов. Потребуем выполнения дополнительного условия:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \tag{4.5}$$

которое называется *калибровкой Лоренца*. Теперь в рассматриваемом уравнении для векторного потенциала исчезает последнее слагаемое в правой части. В уравнении для скалярного потенциала член $\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A}$ заменим на $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$.

Окончательно уравнения поля в потенциалах принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j}, \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho, \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

где потенциалы связаны с векторами поля соотношениями

$$-\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}, \quad \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B} \tag{4.7}$$

и на потенциалы наложено условие калибровки Лоренца (4.5).

Отметим важную особенность уравнений (4.6): векторный потенциал определяется только распределением токов, а скалярный – только распределением зарядов в системе. Это обстоятельство делает уравнения, по существу, независимыми, что значительно упрощает расчет поля. Кроме того, полученные уравнения однотипны и хорошо изучены в математике – это уравнения Даламбера. Решения их найдены как во множестве частных задач, так и в общем виде.

Пример 4.3. **Калибровка Лоренца.**

Установим, что калибровка Лоренца укладывается в условия неоднозначности потенциалов (4.3), т. е она не изменяет значений $\vec{E}$ и $\vec{B}$ Пусть условие Лоренца не выполняется для некоторых потенциалов $\vec{A}'$ и φ'·

$$\operatorname{div}\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = f(\vec{r}, t) \neq 0.$$

С помощью (4.3) перейдем к новым потенциалам

$$\vec{A} = \vec{A}' - \operatorname{grad}\psi, \quad \varphi = \varphi' + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

и потребуем, чтобы условие Лоренца (4.5) выполнялось

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\operatorname{div}(\vec{A}' - \operatorname{grad}\psi) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi' + \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = 0$$

Для выполнения равенства (4.5) достаточно взять такую функцию ψ, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = f(\vec{r},\ t), \tag{4.8}$$

что и доказывает, что в пределах неопределенности выбора потенциалов(4.3) калибровка Лоренца (4.5) всегда возможна. Заметим, что функция ψ определена неоднозначно; к ней можно прибавить слагаемое ξ, являющееся решением уравнения

$$\Delta\xi - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0, \tag{4.9}$$

так как

$$\Delta(\psi + \xi) - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2(\psi + \xi)}{\partial t^2} = f(\vec{r},\ t)$$

Таким образом, и калибровка Лоренца еще не приводит к однозначному выбору потенциалов. Вместо данных выражений для $\vec{A}$ и φ можно использовать новые: $\vec{A}''$ и φ'', причем

$$\vec{A}'' = \vec{A} - \operatorname{grad}\xi,\quad \varphi'' = \varphi + \frac{\partial\xi}{\partial t},$$

где ξ – любое решение уравнения (4.9). Окончательно вид функций $\varphi(\vec{r}, t)$ и $\vec{A}(\vec{r}, t)$ устанавливается уже в процессе решения конкретных задач при учете начальных и граничных условий.

4.3. Понятие об общем решении уравнений поля в потенциалах. Система уравнений в потенциалах (4.6) вместе с формулами, определяющими связь векторов поля с потенциалами (4.7), эквивалентна исходной системе уравнений Максвелла (2.1) или (2.3). Но в математическом отношении уравнения в потенциалах часто предпочтительнее. Главное достоинство уравнений поля в потенциалах состоит в том, что для них можно получить решение в общем виде. Поясним, как ставится и решается эта задача.

Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета задано расположение и движение зарядов:

$$\varrho = \varrho(\vec{r},\ t),\ \vec{j} = \vec{j}(\vec{r},\ t),$$

а требуется найти векторы поля

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},\ t),\qquad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r},\ t).$$

Вместо непосредственного нахождения $\vec{E}$ и $\vec{B}$ определим сначала потенциалы поля $\vec{A}$ и φ. Для этого мы располагаем системой (4.6), состоящей из четырех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\Delta A_x - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0 j_x,\\
&\Delta A_y - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0 j_y,\\
&\Delta A_z - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\mu_0 j_z,\\
&\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Математически эти уравнения однотипны и являются уравнениями Даламбера вида

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g(\vec{r}, t). \tag{4.11}$$

Общее решение этого линейного неоднородного уравнения в частных производных складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения, называемого волновым,

$$\Delta v - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \tag{4.12}$$

и любого частного решения исходного неоднородного уравнения (4.11):

$$u = v + u_{\text{ч}} \tag{4.13}$$

Так как векторы поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{B}(\vec{r}, t)$ должны быть определены однозначно, физический смысл имеют только однозначные и непрерывные вместе с первыми производными решения уравнений (4.10).

Как уравнение Даламбера, так и волновое уравнение исследованы настолько детально, что имеется возможность сразу записать общее решение. Мы не будем сейчас выписывать довольно громоздкие выражения решений, так как они непонятны без предварительного физического анализа, который проведем в следующем параграфе, а разъясним только физический смысл распадения общего решения на две части.

Первое слагаемое общего решения — общее решение волнового уравнения — оказывается выражением для электромагнитных волн, существующих в пространстве и при отсутствии электрических зарядов. Это так называемое свободное поле. Какие именно волны имеют место, зависит целиком от начальных условий.

Каждое волновое уравнение из системы (4.10) есть дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, а такие уравнения имеют в общем решении две произвольные функции. Для исключения произвольных функций, т. е. для перехода к частному решению в каждом конкретном случае, служат начальные условия:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi\,|_{t=0} = \varphi_{\text{нач}}(\vec{r}), \\ &\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_{\text{нач}}(\vec{r}). \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

Аналогично для всех проекций $\vec{A}$:

$$A_x\,|_{t=0} = A_{x\,\text{нач}}(\vec{r}),$$

$$\left.\frac{\partial A_x}{\partial t}\right|_{t=0} = A'_{x\,\text{нач}}(\vec{r}) \text{ и т. д.}$$

Иными словами, свободное поле входит в систему на начальный момент времени как заданное в каждой ее точке. Дальнейшая его эволюция описывается решением волнового уравнения.

Второе слагаемое общего решения уравнений поля в потенциалах — частное решение уравнений (4.10) — описывает конкретное поле, создаваемое заданной системой зарядов. Частный характер этого решения означает, что для каждой конкретной системы отыскивается свое поле. В силу неоднозначности выбора потенциалов поля они определяются в ряде задач с точностью до констант, последние определяются нормировкой потенциалов.

Для замкнутой изолированной системы зарядов в вакууме граничные условия — это условия убыли потенциала с увеличением расстояния от системы зарядов:

$$\varphi|_{r\to\infty} = 0, \qquad \vec{A}|_{r\to\infty} = 0. \tag{4.15}$$

Если заряды занимают ограниченную область пространства (вблизи от начала координат), потенциалы должны убывать при $r \to \infty$ не медленнее, нежели $\frac{1}{r}$.

После того как потенциалы определены, с помощью формул (4.7) находятся векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Тем самым задача по расчету поля оказывается решенной. Примеры решения задач на нахождение потенциалов поля приводятся в курсе далее.

§ 5. Решения уравнений поля

5.1. Свободное электромагнитное поле. Плоские волны. Ниже в параграфе отыскиваются и рассматриваются формулы решений уравнений поля в потенциалах. Задача отыскания общего решения разбита на этапы, причем отдельные части решения и частные решения имеют самостоятельное значение, так как относятся к характерным и практически важным случаям проявлений электромагнитного поля в природе и применения его в технике.

Начнем с общего решения волнового уравнения. Допустим, что электрические заряды отсутствуют, т. е. в пространстве имеет место одно электромагнитное поле. Такое поле и называют свободным. Конечно, в реальной действительности полностью исключить заряды не удается; это только модельное представление. Однако понятие свободного поля имеет важное методологическое значение, так как позволяет изучать свойства поля (как вида материи) отдельно от зарядов.

Итак, поставим задачу об отыскании потенциалов свободного поля. Для этого в системе уравнений (4.6) приравняем правые части нулю и получим четыре однотипных *волновых уравнения* вида

$$\Delta v - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial^2 t^2} = 0, \tag{5.1}$$

где через v обозначена любая из величин A_x, A_y, A_z, φ. Уравнение (5.1) допускает ненулевые решения. Это значит, что поле (в вакууме) может существовать в отсутствие зарядов.