Второе слагаемое общего решения уравнений поля в потенциалах – частное решение уравнений (4.10) – описывает конкретное поле, создаваемое заданной системой зарядов. Частный характер этого решения означает, что для каждой конкретной системы отыскивается свое поле. В силу неоднозначности выбора потенциалов поля они определяются в ряде задач с точностью до констант, последние определяются нормировкой потенциалов.

Для замкнутой изолированной системы зарядов в вакууме граничные условия – это условия убыли потенциала с увеличением расстояния от системы зарядов:

$$\varphi|_{r\to\infty} = 0, \qquad \vec{A}|_{r\to\infty} = 0. \tag{4.15}$$

Если заряды занимают ограниченную область пространства (вблизи от начала координат), потенциалы должны убывать при $r \to \infty$ не медленнее, нежели $\frac{1}{r}$.

После того как потенциалы определены, с помощью формул (4.7) находятся векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Тем самым задача по расчету поля оказывается решенной. Примеры решения задач на нахождение потенциалов поля приводятся в курсе далее.

§ 5. Решения уравнений поля

5.1. Свободное электромагнитное поле. Плоские волны. Ниже в параграфе отыскиваются и рассматриваются формулы решений уравнений поля в потенциалах. Задача отыскания общего решения разбита на этапы, причем отдельные части решения и частные решения имеют самостоятельное значение, так как относятся к характерным и практически важным случаям проявлений электромагнитного поля в природе и применения его в технике.

Начнем с общего решения волнового уравнения. Допустим, что электрические заряды отсутствуют, т. е. в пространстве имеет место одно электромагнитное поле. Такое поле и называют свободным. Конечно, в реальной действительности полностью исключить заряды не удается; это только модельное представление. Однако понятие свободного поля имеет важное методологическое значение, так как позволяет изучать свойства поля (как вида материи) отдельно от зарядов.

Итак, поставим задачу об отыскании потенциалов свободного поля. Для этого в системе уравнений (4.6) приравняем правые части нулю и получим четыре однотипных *волновых уравнения* вида

$$\Delta v - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial^2 t^2} = 0, \tag{5.1}$$

где через v обозначена любая из величин A_x, A_y, A_z, φ. Уравнение (5.1) допускает ненулевые решения. Это значит, что поле (в вакууме) может существовать в отсутствие зарядов.

Уравнение (5.1) получило свое название – волновое – потому что имеет решения, описывающие волновые процессы Напомним, что волной в физике называется процесс распространения в пространстве временных изменений некоторой величины Например, для волн в упругой среде – это распространение колебаний точек среды: каждая точка колеблется около положения равновесия, а колебания распространяются в среде в некотором направлении. Волны потенциала – это распространение некоторых значений величин φ и $\vec{A}$ от точки к точке пространства.

Для простоты рассмотрим сначала одномерный случай:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \tag{5.2}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение (5.2) допускает решение в виде

$$v = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right), \tag{5.3}$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции аргумента $t \pm \frac{x}{c}$.

Решение (5.3) является (для одномерного случая) общим. Используя начальные условия, получаем два уравнения:

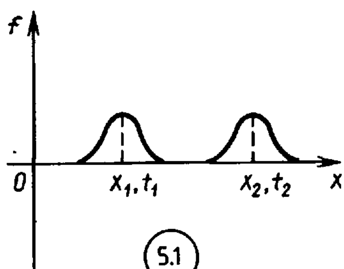
$$f_1\left(-\frac{x}{c}\right) + f_2\left(\frac{x}{c}\right) = \varphi_{\text{нач}}(x),$$

$$f_1'\left(-\frac{x}{c}\right) + f_2'\left(\frac{x}{c}\right) = \psi_{\text{нач}}(x),$$

откуда однозначно определяется вид функций f_1 и f_2, удовлетворяющих начальным условиям. (Более подробное изложение вопроса о плоских волнах см. [2, 3].)

Нетрудно выяснить смысл решения: это бегущие волны потенциала. Значение функции f_1, взятое для точки x_1 в какой-либо момент времени t_1, повторяется в другой момент времени t_2 в другой точке x_2 (рис. 5.1). Из условия $t_1 - \frac{x_1}{c} = t_2 - \frac{x_2}{c}$ имеем $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = c$, т. е. «возмущения» (или значения) потенциала распространяются по оси Ox в положительном направлении со скоростью c. Соответственно f_2 – волна, бегущая в противоположную сторону.

Перейдем теперь к трехмерному волновому уравнению (5.1) и будем искать его решение в виде бегущих волн:



5.1

$$v = f_1\left(t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c}\right), \tag{5.4}$$

где $\vec{k}_0$ – постоянный единичный вектор произвольного направления. Прямой подстановкой доказываем, что уравнение (5.1) удовлетворяется выражением (5.4) при произвольных функциях f_1 и f_2.

Найдем геометрическое место точек, где бегущая волна потенциала имеет одно и то же значение в один и тот же момент времени. Из условия постоянства фазы $t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c} = \text{const}$ следует

$$\vec{k}_0 \vec{r} = \text{const}.$$

Это уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{k}_0$. Таким образом, решение (5.4) представляет собой плоские волны, причем фронт волны движется со скоростью c, а направление движения указано вектором $\vec{k}_0$.

Заметим, что оси координат можно выбирать так, чтобы вектор $\vec{k}_0$ был коллинеарен оси Ox. Тогда $\vec{k}_0 \vec{r} = x$, и мы приходим к простым выражениям, полученным для одномерного случая, т. е. решение (5.4) фактически не является более общим, нежели (5.3).

Итак, волновое уравнение допускает решение в виде плоских волн. Решение содержит две произвольные функции, которые определяются начальными условиями. Что касается граничных условий, то в данном случае они полностью отсутствуют: в силу однородности пустого пространства никаких границ с особыми условиями в нем нет.

В процессе решения выяснена волновая природа свободного электромагнитного поля: оно может существовать только в виде волн, распространяющихся в пустоте со скоростью c.

5.2. Гармонические составляющие свободного поля. Найдем также некоторые частные решения уравнения (5.1). Используя прием разделения переменных, положим

$$v(x, y, z, t) = \varphi_x(x)\, \varphi_y(y)\, \varphi_z(z)\, f(t). \tag{5.5}$$

Подставив выражение (5.5) в формулу (5.1) и разделив полученное равенство почленно на v, имеем

$$\frac{1}{\varphi_x} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} + \frac{1}{\varphi_y} \frac{d^2 \varphi_y}{dy^2} + \frac{1}{\varphi_z} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} - \frac{1}{c^2 f} \frac{d^2 f}{dt^2} = 0.$$

Такое равенство возможно лишь при выполнении следующих условий: каждое слагаемое равно константе, а сумма констант дает нуль. Обозначив постоянные k_x^2, k_y^2, k_z^2, $\frac{\omega^2}{c^2}$, а затем приравнивая их соответствующим членам, получим четыре однотипных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - k_x^2 \varphi_x = 0, \quad \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} - k_z^2 \varphi_z = 0, \\ &\frac{d^2 \varphi_y}{dy^2} - k_y^2 \varphi_y = 0, \quad \frac{d^2 f}{dt^2} - \omega^2 f = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Причем $$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Составляя характеристические уравнения $r_i^2 = k_i^2$ для каждого уравнения системы (5.6), находим возможные частные решения с точностью до постоянного множителя:

$$\varphi_x = e^{\pm i k_x x}, \ \varphi_y = e^{\pm i k_y y}, \ \varphi_z = e^{\pm i k_z z}, \ f = e^{\pm i \omega t}.$$

Отсюда следуют два различных решения для исходного волнового уравнения:

$$\varphi_1 = C_1 e^{\pm i (\vec{k}\vec{r} - \omega t)}; \tag{5.7}$$

$$\varphi_2 = C_2 e^{\pm i (\vec{k}\vec{r} + \omega t)}. \tag{5.8}$$

В обоих случаях

$$\omega = ck, \tag{5.9}$$

что же касается выбора знака перед i, то он несуществен.

Комплексные частные решения в отдельности физического смысла не имеют, так как потенциалы электромагнитного поля — вещественные величины. Но любая линейная комбинация частных решений (5.7), (5.8) есть также решение волнового уравнения. Воспользуемся этим свойством для построения вещественных частных решений, а также общего. Сначала получим два важных частных решения:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{01} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \\ \varphi_2 &= \varphi_{02} \cos(\vec{k}\vec{r} + \omega t), \end{aligned} \tag{5.10}$$

применяя формулу Эйлера

$$e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i \sin\alpha.$$

Они описывают плоские монохроматические гармонические волны с частотой колебаний $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ и длиной волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$; волновой вектор $\vec{k}$ направлен перпендикулярно к фронту волны. Решение φ_1 представляет собой волну, бегущую в направлении $\vec{k}$, а решение φ_2 — волну противоположного направления распространения.

Для построения общего решения волнового уравнения достаточно взять линейную суперпозицию бесконечной совокупности монохроматических волн:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \varphi_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\, d\vec{k}, \tag{5.11}$$

где $\varphi_0(\vec{k})$ — комплексные коэффициенты. Решение будет вещественным при выполнении условия: $\varphi_0(\vec{k}) = \varphi_0^*(-\vec{k})$. Интегрирование в (5.11) производится по всем возможным векторам $\vec{k}$, причем $d\vec{k} = dk_x dk_y dk_z$ и $-\infty < k_{x,\,y,\,z} < \infty$.

Формула (5.11) называется разложением свободного поля по гармоническим составляющим, оно основано на принципе суперпозиции свободных полей. Нетрудно видеть, что гармоники (5.7), (5.8) и (5.10) представляют собой основу для изучения любых свободных полей.

Решение (5.11) математически не что иное, как разложение в интеграл Фурье некоторой функции $\varphi(\vec{r}, t)$ — решения волнового уравнения. Разложение удовлетворяет любым начальным условиям при соответствующем подборе коэффициентов $\varphi_0(\vec{k})$. Используя начальные условия (4.14), имеем

$$\varphi_{нач}(\vec{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \varphi_0(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k},$$

$$\psi_{нач}(\vec{r}) = \frac{-i}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \varphi_0(\vec{k})\, \omega e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k},$$

откуда и определяются комплексные коэффициенты $\varphi_0 = a + ib$.

В качестве решения может использоваться и ряд Фурье:

$$\varphi = \sum_s \varphi_{0s} e^{i(\vec{k}_s\vec{r} - \omega_s t)}, \tag{5.11-а}$$

однако такие решения не являются самыми общими, так как представляют собой только периодические функции для потенциалов поля.

Полученные для скалярного потенциала частные и общие решения (5.10) и (5.11) автоматически обобщаются на векторный потенциал. Например, общее решение можно записать в виде разложения по гармоникам:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \vec{A}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d\vec{k}. \tag{5.12}$$

Подводя итог, заметим, что свободное волновое электромагнитное поле в любом случае сводится к той или иной системе плоских гармоник (5.10) — бегущих плоских монохроматических волн, отличающихся амплитудами, частотами, направлениями распространения. Существенно важным является еще вопрос о направлении векторов $\vec{A}$ и $\vec{k}$ в плоской волне. Обсуждение этого вопроса отложим до § 9, а сейчас отметим, что волны векторного потенциала поперечны, т. е. $\vec{A} \perp \vec{k}$.

5.3. Сферические волны. В предыдущем пункте рассмотрены плоские волны, которые могут существовать в пространстве без зарядов, т. е. представляют собой пример поля, утратившего связь с зарядами. Однако предполагается, что образовалось свободное поле все же в системе, содержащей электрические заряды, а затем ушло за ее пределы. Для плоских волн система конечных размеров, их вызвавшая, должна находиться на бесконечном удалении от наблюдателя.

Рассмотрим теперь иной случай: система зарядов, излучающих электромагнитные волны может трактоваться как точечная и она находится в начале координат. Пока что мы анализируем не сам процесс излучения поля системой (он изучается в главе III), а особенности поля в свободном от зарядов пространстве. Но задача по сравнению с решенной в предыдущем параграфе видоизменяется: в пространстве выделена особая точка, поэтому свободное электромагнитное поле должно обладать центральной симметрией. Задачу следует решать в сферической системе координат.

Итак, решим волновые уравнения вида (5.1) для потенциалов поля в сферической системе координат, начало которой помещено в особую точку поля. Благодаря центральной симметрии потенциалы поля не зависят от углов ϑ и α (см. выражение оператора Лапласа в сферических координатах, П. II, 33). Поэтому уравнение (5.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Это уравнение эквивалентно следующему уравнению.

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rv) = 0, \tag{5.13}$$

в чем легко убедиться, выполняя указанные в уравнении (5.13) действия дифференцирования и помня, что r — независимая переменная.

Но уравнение (5.13) для функции $u = rv$ есть волновое уравнение (5 2) для одномерной задачи, ее решения найдены в пункте 5.1:

$$rv = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right),$$

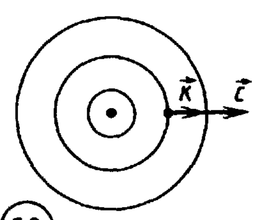
откуда

$$v = \frac{1}{r}f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}f_2\left(t + \frac{r}{c}\right). \tag{5.14}$$

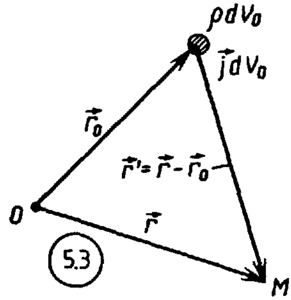
Решение уравнения (5.14) интерпретируется как две *бегущие сферические* волны: расходящаяся от точки O с амплитудой, убывающей пропорционально $\frac{1}{r}$, и вторая — сходящаяся с растущей амплитудой.

В сферических волнах в фиксированный момент времени рассматриваемые величины φ и $\vec{A}$ имеют постоянные значения на поверхности сферы с центром в начале координат — это волновой фронт данных волн. Для расходящейся волны волновой фронт движется от начала координат со скоростью c, для сходящейся — к началу координат. На рисунке 5.2 показаны фронты сферической волны через равные промежутки времени.

В отличие от плоских волн, у которых значение волнового поля сохранялось с течением времени во всех точках движущегося фронта волны, у сферических волн величины v убывают пропорционально $\frac{1}{r}$. Так как с источником поля ограниченных размеров следует связы-



5.2



5.3

вать расходящуюся волну, то далее мы будем рассматривать только расходящиеся сферические волны.

Для приложений особенно важны сферические гармонические волны. Используя результаты § 5, п. 5.2, нетрудно записать формулы для потенциалов таких волн. Например, для монохроматических волн имеем

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{r} \cos(kr - \omega t),$$
$$\vec{A} = \frac{\vec{A}_0}{r} \cos(kr - \omega t), \tag{5 15}$$

а разложение потенциала свободного поля по сферическим гармоникам имеет вид

$$\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, r} \int \vec{A}_0(k)\, e^{i(kr - \omega t)} dk. \tag{5.16}$$

(Особенность разложений (5.16) по сравнению с (5.11) и (5.12) в том, что они сводятся к одномерному случаю: векторы $\vec{k}$ и $\vec{r}$ сонаправленные.)

Подводя итоги рассмотрения формул для потенциалов свободного поля, укажем, что при переходе от потенциалов к напряженностям поля с помощью формул (4.1) и (4.2) мы получим волновые поля для векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. При этом гармоники для потенциалов дадут в результате дифференцирования, содержащегося в (4.1) и (4.2), аналогичные гармоники для напряженности и индукции. (Подробно этот вопрос изучается в главе III.)

Монохроматические волны оказываются простейшими (элементарными) составляющими переменного поля: из них по принципу суперпозиции известными математическими средствами может быть построено любое свободное поле.

Обсудим также, в каких случаях используется решение в виде плоских, а в каких в виде сферических волн Как уже говорилось, плоская волна есть решение для пустого пространства, в котором все точки равноправны Сферическая волна может быть отнесена к случаю с выделенной особой точкой — центром, излучающим волны По условиям задачи особых точек может быть несколько, каждая из них рассматривается в общем случае как источник сферических волн. Непрерывное множество особых точек может образовывать поверхность, все точки которой являются излучающими центрами

Нетрудно заключить, что решения волнового уравнения в виде сферических волн характерны для пространства, в котором, кроме электромагнитного поля, имеются тела, поверхности которых излучают сферические волны Взаимодействие (интерференция) сферических волн приводит к дифракции первичных плоских волн, а последняя объясняется с помощью принципа Гюйгенса, выражающего количественную связь между упомянутыми системами волн (см. § 24, п 24.3).

5.4. Потенциалы поля стационарной системы движущихся зарядов. Выше в § 5 (пп. 5.1, 5.2, 5.3) найдена первая часть общего решения уравнений поля. Приступаем к нахождению второй части – частного решения уравнений Даламбера (4.10), выражающего поле конкретной системы зарядов. Начнем с наиболее простого случая (но имеющего большую практическую ценность) – со стационарного движения зарядов, при котором плотности зарядов и токов от времени не зависят:

$$\varrho = \varrho(\vec{r}), \ \vec{j} = \vec{j}(\vec{r}).$$

В этом случае потенциалы поля, созданного данной системой зарядов, от времени также не зависят, а уравнения поля (4.10) сводятся к однотипным уравнениям Пуассона:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho; \tag{5.17}$$

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}. \tag{5.18}$$

Получим решения этих уравнений, не стремясь к математической строгости, а руководствуясь физически наглядными соображениями.

Прежде всего разобъем все пространство на элементы dV_0, которые будем считать точечными. В них сосредоточены элементы заряда ϱdV_0 и элементы тока $\varrho\vec{v}dV_0 = \vec{j}dV_0$. По принципу суперпозиции поле складывается из полей, созданных этими зарядами. В принципе суперпозиции полей (2.17), созданных зарядами, фигурировали векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Однако $\vec{E}$ и $\vec{B}$ определены через φ и $\vec{A}$ с помощью линейных операций. Поэтому скалярно складываются φ и векторно $\vec{A}$, созданные отдельными зарядами.

Далее везде мы будем придерживаться обозначений рисунка 5.3: $\vec{r}$ или x, y, z – координаты точки пространства, в которой вычисляем поле, или кратко – координаты точки наблюдения M; $\vec{r}_0$ или x_0, y_0, z_0 – координаты точки пространства, в которой расположен заряд, или кратко – координаты заряда. По ним в наших формулах будет выполняться интегрирование, так как заряд распределен в пространстве непрерывно; $\vec{r}'$ – вектор, проведенный от точечного заряда в точку, где поле рассчитывается, т. е. в точку наблюдения M.

Рассмотрим поле, созданное бесконечно малым зарядом ϱdV_0, находящимся в точке пространства $\vec{r}_0$. Наши дальнейшие рассуждения о поле точечного заряда будут справедливы и для заряда конечного по величине, но точечного; поэтому введем обозначение

$$q = \varrho dV_0 \tag{5.19}$$

вместо $dQ = \varrho dV_0$. Запишем уравнения поля в потенциалах (5.17) и (5.18) для этого заряда с помощью формул (2.25-а):

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0); \tag{5.20}$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \tag{5.21}$$

Используя тождество (П. III, 9)

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}),$$

находим, что уравнение (5.20) удовлетворяется решением

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r'}. \tag{5.22}$$

Полученная формула (5.22) имеет широкое применение сама по себе: это потенциал поля неподвижного точечного электрического заряда.

В процессе решения дифференциального уравнения в частных производных (5 20) потенциал может быть определен с точностью до любой функции ψ, являющейся решением уравнения Лапласа $\Delta\psi = 0$. В самом деле, новый потенциал $\varphi' = \varphi + \psi$ в этом случае удовлетворяет уравнению (5.20). В частности, потенциал (5.22) определяют с точностью до константы. $\varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'} + C$. В нашей формуле (5.22) $C = 0$. Это соответствует следующей нормировке потенциала: $\varphi = 0$, если $r = \infty$.

Соответственно для векторного потенциала имеем

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{r'}. \tag{5.23}$$

Продолжим решение задачи о поле системы стационарно движущихся зарядов. Для этого вернемся к непрерывно распределенным по пространству зарядам. Потенциалы, созданные элементами тока и заряда, имеют вид

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\varrho dV_0}{r'}; \tag{5.24}$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} dV_0}{r'}. \tag{5.25}$$

Осталось согласно принципу суперпозиции просуммировать их по всему объему, занимаемому системой зарядов:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho(\vec{r}_0)}{r'} dV_0; \tag{5.26}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{r'} dV_0. \tag{5.27}$$

Это и есть потенциалы поля в стационарном случае. Формулы

(5.26), (5.27) и уравнения (5.17) и (5.18) являются основой раздела электродинамики, изучающего стационарные поля (см. главу II).

5.5. Запаздывающие потенциалы. Изучим теперь решение уравнений поля со временем (4.10), т. е. для произвольно движущихся зарядов. Для этого запишем их для заряда в элементе объема, окружающего точку $\vec{r}_0$ и принимаемого за точечный:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,dV_0, \\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\vec{j}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,dV_0. \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

Очевидно, что везде, кроме точки $\vec{r}_0$, уравнения (5.28) сводятся к изученным ранее (5.13) с решениями, обладающими центральной симметрией. Такие решения уже найдены: это сферические волны вида (5.14). Их в данном случае следует считать испущенными точечными источниками, помещенными в точку $\vec{r}_0$. В выражении для потенциала (см. (5.14))

$$\frac{1}{r'}f\left(t \pm \frac{r'}{c}\right)$$

отношение $\frac{r'}{c}$ показывает запаздывание (опережение) изменения поля в точке M по сравнению с точкой $\vec{r}_0$, происходящее вследствие конечной скорости распространения поля.

Однако вид функций f_1 и f_2 в формуле (5.14) не определен, мы же отыскиваем частное решение с конкретным видом функций. Для нахождения f_1 и f_2 рассмотрим малую окрестность точки $\vec{r}_0$. Пренебрегая запаздыванием значений потенциала в волне по времени, можно при $r' \to 0$ взять вместо уравнений (5.28) асимптотические уравнения Пуассона, рассмотренные ранее (5.20) и (5.21). Их решения найдены: это выражения (5.24), (5.25). В нашем случае величины зарядов в элементах объема пространства не постоянны, а зависят от времени: $\varrho = \varrho(\vec{r}_0, t)$, $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}_0, t)$. Решения в виде сферических волн (5.14) и асимптотические решения (5.24) и (5.25) должны непрерывно переходить друг в друга. Поэтому поле, созданное элементом объема пространства, будет иметь скалярный потенциал:

$$d\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varrho\left(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c}\right)dV_0}{r'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varrho\left(\vec{r}_0, t + \frac{r'}{c}\right)dV_0}{r'}.$$

Осталось просуммировать найденный потенциал по всем элементам объема пространства, где расположены заряды, чтобы получить искомое решение скалярного уравнения (4.10):

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho\left(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho\left(\vec{r}_0, t + \frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0.$$

Аналогично получатся решения и для векторного потенциала:

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{r}_0,\ t-\frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{r}_0,\ t+\frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0.$$

(Интегрирование ведется по элементам объема, где находятся заряды, т. е. по точкам $\vec{r}_0$ во всем бесконечном пространстве.)

Первые слагаемые найденных потенциалов носят название запаздывающих потенциалов:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\vec{r},\ t)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho\left(\vec{r}_0,\ t-\frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0,\\ \vec{A}(\vec{r},\ t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{r}_0,\ t-\frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0,\end{aligned}\right\}\tag{5.29}$$

а вторые – опережающих:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\vec{r},\ t)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho\left(\vec{r}_0,\ t+\frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0,\\ \vec{A}(\vec{r},\ t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{r}_0,\ t+\frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0.\end{aligned}\right\}\tag{5.30}$$

Решения (5.29) и (5.30) скорее угаданы в наших рассуждениях, а не получены в результате строгой математической выкладки. Поэтому имеет смысл проверка их справедливости. Прямая подстановка решений в исходные уравнения убеждает нас в истинности решений. Подставим скалярный потенциал из (5.29) в уравнение

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

и произведем дифференцирование под интегралом:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left\{\frac{1}{r'}\Delta\varrho+2\nabla\frac{1}{r'}\nabla\varrho-\frac{1}{r'c^2}\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}\right\}dV_0+$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\varrho\left(\vec{r}_0,\ t-\frac{r'}{c}\right)\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}dV_0=-\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r}).$$

Последний интеграл в левой части этого равенства согласно тождеству (П. III, 9) дает $-\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r})$. Следовательно, первый интеграл должен тождественно обратиться в нуль. Выполним вычисления для всех трех слагаемых под интегралом:

1) $\frac{1}{r'}\nabla\left[\nabla\varrho\left(t-\frac{r'}{c}\right)\right]=\frac{1}{r'}\nabla\left[\dot{\varrho}\left(-\frac{\vec{r}'}{r'c}\right)\right]=\frac{1}{r'}\ddot{\varrho}\frac{\vec{r}'}{r'c}\frac{\vec{r}'}{r'c}+\frac{1}{r'}\dot{\varrho}\left(\frac{\vec{r}'}{c}\frac{\vec{r}'}{r'^3}-\frac{3}{r'c}\right)=\frac{1}{r'c^2}\ddot{\varrho}-\frac{2\dot{\varrho}}{cr'^2}.$

2) $2\nabla\frac{1}{r'}\nabla\varrho=-\left(\frac{\vec{r}'}{r'^3}\right)\dot{\varrho}\left(-\frac{\vec{r}'}{r'c}\right)=\frac{2\dot{\varrho}}{cr'^2}.$

3) $-\frac{1}{r'c^2}\ddot{\varrho}.$

Таким образом, подынтегральное выражение обратилось в нуль.

Подстановка (5.29) в уравнение (4.10) обратила его в тождество. Это доказывает, что формулы (5.29), (5.30) выражают решение уравнений поля. Осталось еще заметить, что они определены с точностью до любых функций ψ, $\vec{A}'$, являющихся решением соответствующего волнового уравнения. В принятом написании формул (5.29) и (5.30) потенциалы нормированы на нуль в бесконечном удалении от системы зарядов, занимающих ограниченную область пространства.

Решения в запаздывающих потенциалах имеют важный физический смысл и основополагающее для большинства задач электродинамики значение. Согласно формуле (5.29) поле в точке $M(\vec{r})$ в момент времени t определяется значениями ϱ и $\vec{j}$ в точке $\vec{r}_0$ в предыдущий момент времени $t - \frac{r'}{c}$. Таким образом, влияние зарядов и токов, создающих поле, на другие заряды и токи (внесенные в поле) передается в пустоте со скоростью c. С этой скоростью передаются изменения и возмущения поля. (Решение волнового уравнения уже привело ранее к этой скорости для распространения фазы волны или значения потенциалов φ и $\vec{A}$.)

Выводы о запаздывании являются выражением релятивистской идеи близкодействия, вытекающей в наших рассуждениях из уравнений Максвелла, а скорость распространения взаимодействия входит в уравнения через электрическую и магнитную постоянные $\left(c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\right)$.

Итак, частное решение уравнений поля в потенциалах, отвечающее любому непрерывному распределению и движению зарядов в пространстве, найдено. Соответствующее найденным потенциалам поле и порождается непрерывной системой зарядов в вакууме. Если в соответствии с начальными условиями электромагнитных волн в пространстве нет, то решение в виде запаздывающих потенциалов для заданной системы зарядов однозначно определяет поле.

Что касается опережающего потенциала (5.30), то это решение возникло из-за симметрии уравнений электродинамики относительно обращения времени: преобразование $t \to t' = -t$ не изменяет уравнений поля в потенциалах. Однако физического смысла обращение времени в макроскопической электродинамике не имеет, инвариантность уравнений относительно замены t на $-t$ ни к каким наблюдаемым физическим явлениям не приводит. Опережающие потенциалы противоречат принципу причинности, в согласии с которым изменение заряда приводит к изменению поля и предшествует ему, а не наоборот. Поэтому решения в опережающих потенциалах нами далее не рассматриваются.

Пример 5.1. **Электромагнитное поле медленно ($v \ll c$), равномерно и прямолинейно движущегося точечного заряда.**

В этом случае можно воспользоваться решением уравнений (5.17) и (5.18) в виде (5.22) и (5.23):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r'}, \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{r'}$$

для каждого момента времени, т. е. для каждого мгновенного значения r'. Выбирая начало координат на траектории заряда, имеем:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t.$$

Напряженность и индукция поля определяются по формулам (4.7):

$$\vec{E} \approx -\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^2}\frac{\vec{r}\,'}{r'}; \tag{1}$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}q\left[\mathrm{grad}\frac{1}{r'}\vec{v}\right] = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,[\vec{r}\,'\vec{v}]}{r'^3}. \tag{2}$$

Из сравнения формул (1) и (2) усматривается их связь:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}[\vec{v}\,\vec{E}].$$

5.6. Характерные особенности и итоги общей задачи о расчете полей. Найдем условия, при которых решения уравнений поля в потенциалах имеют физический смысл. Потенциалы должны быть конечны, т. е. интегралы в формулах (5.29), (5.30), распространенные на все пространство, должны быть сходящимися. Поместим начало координат в точку наблюдения. Тогда $\vec{r} = 0$, $\vec{r}\,' = \vec{r}_0$. Вместо $\vec{r}\,'$ и $\vec{r}_0$ используем обозначение $\vec{r}$. Формулы преобразуются к виду

$$\varphi_м(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho\left(\vec{r},\ t - \frac{r}{c}\right)}{r}dV,\quad \vec{A}_м(t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{r},\ t - \frac{r}{c}\right)}{r}dV.$$

Очевидно, что ϱ и $\vec{j}$ должны быть достаточно быстро убывающими функциями r, в противном случае интегралы расходятся.

Поле изолированной системы зарядов, занимающих ограниченную область пространства, должно достаточно быстро убывать на бесконечности. Можно уточнить необходимый характер убывания φ и $\vec{A}$, привлекая на помощь формулу (3.8) для энергии поля и выражение для закона сохранения энергии (3.13), при выводе которых делалось существенное предположение об убыли $\vec{E}$ и $\vec{B}$ более быстрой, нежели $\frac{1}{r}$. Оно выполняется, если φ и $\vec{A}$ стремятся к нулю как $\frac{1}{r}$.

Проверим, как ведет себя скалярный потенциал ограниченной в пространстве системы зарядов при $r \to \infty$. Из рисунка 5.3 видно, что $r_0 \ll r'$, $r' \approx r$, так что можно взять общее запаздывание $\frac{r}{c}$. В таком случае

$$\varphi(\vec{r},\ t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int\varrho\left(\vec{r}_0,\ t - \frac{r}{c}\right)dV_0 = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{c}\right) \sim \frac{1}{r},$$

что и требовалось. Аналогично обстоит дело и с потенциалом $\vec{A}$, модуль которого оказывается обратно пропорциональным расстоянию до системы.

Итак, потенциалы поля, а вместе с ними и векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$, удовлетворяют имеющим физический смысл граничным условиям на бесконечности для системы зарядов, занимающей конечную область пространства.

Наконец, подведем итоги решения уравнений поля в потенциалах. Общее решение складывается из системы гармонических плоских волн всевозможных направлений и частот, а также решения в запаздывающих потенциалах:

$$\varphi_{\text{общ}} = \varphi_{\text{волн}} + \varphi_{\text{зап}},$$

$$\vec{A}_{\text{общ}} = \vec{A}_{\text{волн}} + \vec{A}_{\text{зап}}.$$

Поле складывается из свободного поля и поля, созданного системой зарядов, занимающих ограниченную область пространства.

Было выяснено, что при наличии точечного источника имеют место сферические волны. Но на больших расстояниях любая система зарядов конечных размеров может рассматриваться как точечная, а потенциалы, ею создаваемые, как сферические волны:

$$\varphi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

В свою очередь, если r велико по сравнению с областью, где ведутся наблюдения, то $\frac{1}{r} = \text{const}$ и сферическая волна переходит в плоскую волну:

$$\varphi = f\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Поэтому плоские волны можно считать также испущенными некоторой системой зарядов, удаленной от точки наблюдения на очень большое расстояние. Обе составляющие поля – свободное поле и поле запаздывающего потенциала – можно считать имеющими общее происхождение, считать «порожденными» зарядами.

Однако далеко не всегда возможно восстановить предысторию движения и расположения зарядов за предшествующее настоящему моменту время и свести свободное поле к полю зарядов. Хорошим примером свободного поля служит так называемое реликтовое излучение, приходящее на Землю со всех точек небесной сферы. Оно было испущено зарядами на ранних стадиях образования Вселенной, т. е. 10 – 20 млрд. лет назад. Ясно, что при анализе поля, порожденного какой-либо наблюдаемой в настоящее время системой зарядов, реликтовое излучение в общем случае рассматривается как накладывающееся на поле системы, существующее независимо от нее. (Хотя по нему и получают некоторую информацию о ранних стадиях развития Вселенной.)

Второе слагаемое в общем решении – запаздывающий потенциал – соответствует полю, образованному зарядами в обозримом промежутке времени в прошлом и существующему в каждой точке пространства в данный момент времени. Поскольку практический смысл имеет ограниченная в пространстве система зарядов, то историю ее движения – функции $\varrho(\vec{r}_0, t)$, $\vec{j}(\vec{r}_0, t)$ – необходимо знать только до некоторого начального момента времени в прошлом. Пусть R – максимальное расстояние до зарядов системы. В таком случае, зная плотности ϱ и $\vec{j}$ с момента времени $t - \frac{R}{c}$, можно в момент t и во все последующие моменты определить поле, создаваемое системой зарядов, в заданной точке наблюдения M.

На практике часто начальные условия упрощаются: до момента $t = 0$ система находилась в стационарном движении $(\varrho(\vec{r}_0), \vec{j}(\vec{r}_0))$, после чего – в нестационарном $(\varrho(\vec{r}_0, t), \vec{j}(\vec{r}_0, t))$. Поэтому в момент $t = 0$ потенциалы определяются постоянными начальными значениями, а затем – выражениями для запаздывающих потенциалов. Поле, имевшее в начальный момент статический характер, далее изменяется вместе изменением ϱ и $\vec{j}$ (с учетом запаздывания).

Наконец, типичны некоторые периодические изменения ϱ, $\vec{j}$, приводящие к периодическому же полю. В таком случае вопрос о начальном состоянии и о предыстории движения зарядов снимается.

Таковы в общих чертах итоги решения задачи электродинамики по нахождению поля в вакууме.

Методические указания и рекомендации

I. Глава I курса содержит теоретические основы классической электродинамики: в ней введены основные понятия и величины, а также основные уравнения и принципы этой науки. Все остальное содержание электродинамики составляют выводы и следствия, полученные с помощью математических преобразований при решении системы уравнений Максвелла или Максвелла – Лоренца в тех или иных случаях конкретных систем полей и зарядов.

Основополагающее положение главы I определяет и методику ее изложения и изучение курса в целом; материал должен быть подробно изложен на лекциях; при изучении остальных глав курса, где возможности для самостоятельной работы студентов более благоприятны, следует постоянно возвращаться к этой главе.

Ввиду особой важности положений, изложенных в главе как для конкретных приложений теории к частным задачам, так и для понимания природы электромагнитных взаимодействий, студентам надо знать их качественные формулировки:

– Фундаментальные понятия электродинамики – это понятия электрического заряда и электромагнитного поля.

– Заряд – свойство элементарных частиц и тел, характеризующееся величиной заряда Q. Эта величина измеряется по силовому взаимодействию зарядов и токов. Заряды создают электромагнитное поле и испытывают силовое действие поля. Справедлив закон сохранения заряда.