$\operatorname{div}\vec{A} = f$. Для $\vec{A}'$ имеем $\operatorname{div}\vec{A}' - \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi = f$; следовательно, для выполнения равенства $\operatorname{div}\vec{A}' = 0$ нужно, чтобы $\Delta\psi = -f$. Поскольку ψ – произвольный скаляр, это всегда возможно.)

Глава II
СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Выше рассмотрены общая система уравнений для электромагнитного поля и общее решение этой системы. Сейчас мы приступаем к анализу частных проявлений поля, образованного конкретными системами зарядов, в которых расположение и движение зарядов подчинены определенным ограничениям (например, заряды покоятся, движутся равномерно и т. д.). Сразу же оговорим одно условие для всех задач подобного рода. Общее решение уравнений поля в потенциалах складывается из общего решения уравнений (4.10) без правой части и частного решения этих полных уравнений – решения в виде запаздывающих потенциалов. С помощью принципа суперпозиции полей первое слагаемое – совокупность плоских волн – можно отнести к пустому пространству без зарядов; поэтому волны могут иметь место в любой задаче при любой системе зарядов и конкретно определяются начальными условиями. В задачах, где отыскивают поле зарядов, нет смысла рассматривать волновую часть решения, а следует сосредоточиться только на втором слагаемом, относящемся к полю, созданному данной системой зарядов. Иными словами, мы всякий раз решаем задачу с начальными условиями, соответствующими отсутствию волнового поля, не связанного с зарядами, данными в задаче.

§ 6. Стационарное электрическое поле в вакууме

6.1. Особенности стационарных полей. Стационарное поле возникает при условии $\frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = 0$, т. е. плотности токов и зарядов постоянны во времени. В этом случае уравнения поля в потенциалах (4.10) допускают независящие от времени решения, найденные ранее в § 5; они выражены формулами (5.26) и (5.27). Решения можно получить и из формул для запаздывающих потенциалов (5.29), отбрасывая зависимость величин ϱ и $\vec{j}$ от времени:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho(\vec{r}_0)}{r'}dV_0; \tag{6.1}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{r'}dV_0. \tag{6.2}$$

После вычисления потенциалов в конкретной задаче векторы стационарного поля находятся дифференцированием полученных выражений согласно определениям

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \ \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{6.3}$$

В ряде задач целесообразно непосредственно применить систему уравнений Максвелла (2.1). Так как нас интересуют независящие от времени решения (волновое поле из рассмотрения исключено), то члены, содержащие производные по времени в уравнениях (2.1), следует отбросить. Уравнения Максвелла для стационарного поля приобретают вид

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\varrho, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = 0; \end{cases} \tag{6.4}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}, \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

Система распалась на независимые подсистемы: (6.4) — для электростатических и (6.5) — для магнитостатических полей.

Электростатическое поле по системе (6.4) есть потенциальное, линии напряженности которого начинаются и оканчиваются на зарядах; поэтому о зарядах говорят как об источниках поля. Вихревая составляющая электрического поля отсутствует. Магнитостатическое поле порождается токами и имеет вихревой (соленоидальный) характер. Важная особенность стационарных полей вытекает из разделения системы уравнений Максвелла на две независимые подсистемы (6.4) и (6.5). Соответственно электростатическое поле неподвижных электрических зарядов существует без магнитного поля и может изучаться отдельно. Что касается магнитостатического поля, то оно связано с токами зарядов, т. е. в общем случае хотя и независимо от электрического поля, но существует вместе с ним. Однако, как мы знаем из общего курса физики, в явлениях электрического тока в проводниках практическое значение вне проводника имеет одно магнитное поле, которое поэтому исследуется отдельно от электрического.

6.2. Уравнения стационарного электрического поля в потенциалах. Постоянное электрическое поле существует при неподвижных зарядах, если $\varrho = \varrho(\vec{r})$ и $\vec{j} = 0$, или стационарно движущихся зарядах, если $\varrho = \varrho(\vec{r})$ и $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$.

В первом случае токи отсутствуют, а во втором имеют во всех точках пространства постоянную во времени плотность.

В случае неподвижных зарядов стационарное электрическое поле называют электростатическим. Каких-либо особенностей у него по сравнению со стационарным полем нет, и термин можно употреблять в более общем смысле, если $\varrho = \varrho(\vec{r})$.

Ранее мы отметили, что отделение зарядов от тел, на которых они сосредоточены, является полезной идеализацией, допустимой при условии, что влиянием на поле зарядов, входящих в состав тел, можно пренебречь (см. § 2, п. 2.1). Но влиянием тел на расположение и движение зарядов пренебречь нельзя. Это особенно отчетливо видно в электростатическом случае. Так, покоящиеся свободные заряды вообще не могут существовать, ибо силы взаимодействия между ними, передаваемые электростатическим полем, приведут их в ускоренное движение. Точно так же невозможно и равномерное движение свободных зарядов (постоянный ток) под действием одних электростатических сил. Именно тела и вещественные среды (благодаря электромагнитным взаимодействиям, выходящим за пределы электростатических и даже вообще за пределы взаимодействий, описываемых системой Максвелла – Лоренца и подчиняющихся квантовомеханическим законам) обеспечивают связи свободных зарядов, задающие их положение и ограничивающие их перемещение в пространстве. Но природу этих связей при изучении стационарных полей в электродинамике мы не рассматриваем. Их наличие учитывается заданием конфигураций зарядов и токов, т. е. функциями $\varrho(\vec{r})$ и $\vec{j}(\vec{r})$.

Для стационарного поля, кроме дифференциальных уравнений (6.4), справедливо и интегральное уравнение

$$\oint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q, \tag{6.6}$$

носящее название теоремы Гаусса и часто применяемое для расчета полей при некоторых симметричных распределениях заряда в пространстве.

Уравнение для потенциала электростатического поля следует из уравнений (4.10), если считать величины ϱ и φ независимыми от времени:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho. \tag{6.7}$$

Это уравнение известно в математике как уравнение Пуассона. Мы уже знаем его частное решение (6.1). Для получения общего решения уравнения (6.7) к частному решению (6.1) следует добавить общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\Delta\tilde{\varphi} = 0, \tag{6.8}$$

которое называется уравнением Лапласа.

В задачах на электростатическое поле в вакууме обычно используется решение $\tilde{\varphi} = 0$, что означает отсутствие иных постоянных полей, кроме того, что создает заданная система. Но уравнение Лапласа имеет самостоятельное применение для нахождения электростатического поля в пространстве без зарядов, удовлетворяющего определенным граничным условиям.

Итак, в разных случаях для расчета электростатического поля следует пользоваться либо формулами (6.1) и (6.6), либо уравнениями (6.7) и (6.8). Для непрерывной системы зарядов в вакууме физический смысл имеют только всюду непрерывные (вместе с производными), однозначные, ограниченные их решения.

Пример 6.1. **Вычисление потенциала и напряженности поля однородно заряженного шара.**

Пусть радиус шара равен a, плотность заряда ϱ.

С помощью формулы (6.1) запишем

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\varrho}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dV_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}.$$

Вычисления проведем в сферической системе координат $\vec{r}(r, \vartheta, \alpha)$ (рис. 6.1):

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = \frac{\varrho}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^a\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \frac{r_0^2 \sin\vartheta_0\, dr_0 d\vartheta_0\, d\alpha_0}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\vartheta_0}}.$$

Сначала интегрируем по α_0

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\int\limits_0^a\int\limits_0^\pi \frac{r_0^2 \sin\vartheta_0\, dr_0 d\,\vartheta_0}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\vartheta_0}}.$$

Для выполнения интегрирования по ϑ_0 делаем подстановку:

$$t^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\vartheta_0.$$

Теперь при $r \geq a$:

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0 r}\int\limits_0^a r_0\, dr_0 \int\limits_{r-r_0}^{r+r_0} dt = \frac{\varrho a^3}{3\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}.$$

При $r < a$ интервал интегрирования следует разделить на две части: $r_0 \geq r$ и $r_0 \leq r$ Тогда

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0 r}\left\{\int\limits_0^r r_0\, dr \int\limits_{r-r_0}^{r+r_0} dt + \int\limits_r^a r_0\, dr \int\limits_{r_0-r}^{r_0+r} dt\right\} = \frac{\varrho a^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\varrho r^2}{6\varepsilon_0}.$$

Потенциал поля обладает сферической симметрией, т. е. не зависит от углов ϑ и α

При вычислении напряженности пользуемся формулой $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$: вне шара

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r},$$

внутри шара

$$\vec{E} = \frac{\varrho r}{3\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_r}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r},$$

где $Q = \frac{4}{3}\pi a^3\varrho$ — заряд всего шара, а $Q_r = \frac{4}{3}\pi r^3\varrho$ — заряд, находящийся внутри шара радиусом r.

Пример 6.2 **Непосредственное интегрирование уравнения для потенциала.**

Решим задачу из примера 6.1 с помощью интегрирования уравнений поля (6.7) и (6.8).

В сферической системе координат имеем исходные уравнения

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_1}{dr}\right) = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0},\quad 0 < r \leq a; \tag{1}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_2}{dr}\right)=0,\ r>a. \quad (2)$$

Вводя подстановку $U=r^2\frac{d\varphi_1}{dr}$, разделим переменные в уравнении (1), получим

$$dU=-\frac{\varrho r^2}{\varepsilon_0}dr.$$

Интегрируя, находим U:

$$U=-\frac{\varrho r^3}{3\varepsilon_0}+A_1,$$

где A_1 – постоянная интегрирования. Возвращаясь к исходной переменной φ_1, имеем для нее уравнение

$$d\varphi_1=-\frac{\varrho r}{3\varepsilon_0}dr+\frac{A_1}{r^2}dr,$$

которое также непосредственно интегрируется:

$$\varphi_1=-\frac{\varrho r^2}{6\varepsilon_0}-\frac{A_1}{r}+B_1. \quad (3)$$

Решение уравнения (2) выписываем по аналогии с выражением (3):

$$\varphi_2=-\frac{A_2}{r}+B_2. \quad (4)$$

Найдем постоянные интегрирования в выражениях (3) и (4). Чтобы устранить бесконечные значения потенциала в точке $r=0$, следует положить $A_1=0$. Нормируем φ_1 условием: $\varphi_1/_{r=0}=0$, откуда и $B_1=0$. Выражение (3) упростилось:

$$\varphi_1=-\frac{\varrho r^2}{6\varepsilon_0}. \quad (5)$$

Далее необходимо написать условия непрерывности потенциалов и их производных на границе шара. Из них находим значения оставшихся двух постоянных:

$$A_2=-\frac{\varrho a^3}{3\varepsilon_0},\qquad B_2=-\frac{\varrho a^2}{2\varepsilon_0}.$$

Для потенциалов поля окончательно имеем выражения

$$\varphi_1=-\frac{\varrho r^2}{6\varepsilon_0},\qquad \varphi_2=-\frac{\varrho a^2}{2\varepsilon_0}+\frac{\varrho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r},$$

приводящие к тем же напряженностям поля вне и внутри шара, что и в примере 6.1.

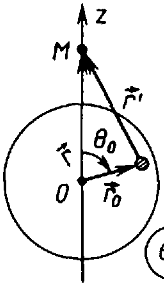
Пример 6.3. **Применение теоремы Гаусса.**

Совсем просто решается рассмотренная выше задача с помощью теоремы Гаусса (6 6). В силу симметрии распределения зарядов по условиям задачи на любой сфере радиусом r и центром в центре шара напряженность поля $\vec{E}$ постоянна по модулю и направлена по радиусу (от центра или к центру) Дальнейшие вычисления несложны:

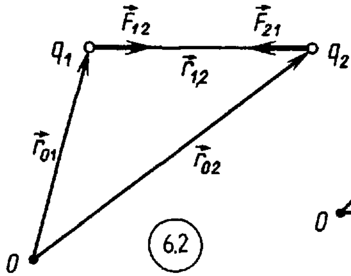
$$\oint E dS=\frac{1}{\varepsilon_0}Q_r,$$

$$4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}Q_r,\ E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_r}{r^2},$$

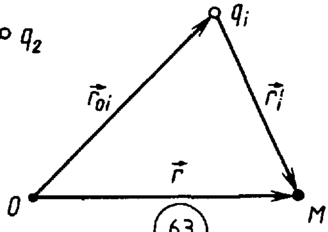
где Q_r – заряд внутри сферы.



6.1



6.2



6.3

Пример 6.4. **Нахождение поля при непрерывно распределенном заряде.**

Вычислим потенциал поля заряда, непрерывно распределенного по всему пространству с плотностью

$$\varrho(r_0) = \varrho_0 e^{-\frac{r_0}{R}}.$$

По формуле (6.1)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho(r_0)}{r'} dV_0,$$

интеграл берется по способу, описанному в примере (6.1).

$$\varphi(r,\ \vartheta,\ \alpha) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varrho_0 e^{-\frac{r_0}{R}} r_0^2 \sin\vartheta_0 dr_0 d\vartheta_0 d\alpha_0}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r\, r_0 \cos\vartheta_0}}.$$

При интегрировании выделяются две области пространства: где $r_0 \geq r$ и $r_0 < r$. Получаем ответ:

$$\varphi(r) = \frac{\varrho_0 R^2}{\varepsilon_0} \left[\frac{2R}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{R}} \right) - e^{-\frac{r}{R}} \right],$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{\varrho_0 R^2}{\varepsilon_0} \left[-\frac{2R}{r^2} \left(1 - e^{-\frac{r}{R}} \right) + \frac{2}{r} e^{-\frac{r}{R}} + \frac{1}{R} e^{-\frac{r}{R}} \right] \frac{\vec{r}}{r}.$$

Вычисления значительно упрощаются, если напряженность находить по теореме Гаусса:

$$\oint E_r dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \varrho_0 e^{-\frac{r_0}{R}} dV_0.$$

Вычисляя интеграл в левой части равенства аналогично примеру 6.3, в сферических координатах, имеем

$$4\pi r^2 E_r = 4\pi \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} \int\limits_0^r r_0^2 e^{-\frac{r_0}{R}} dr_0.$$

Интеграл в правой части легко берется по частям:

$$\int\limits_0^r r_0^2 e^{-\frac{r_0}{R}} dr_0 = -R \left[r_0^2 e^{-\frac{r_0}{R}} - 2R \left(-r_0 e^{-\frac{r_0}{R}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - Re^{-\frac{r_0}{R}} \right) \right] \Bigg|_0^r = -R^2 \left[-2R \left(1 - e^{-\frac{r}{R}} \right) + 2re^{-\frac{r}{R}} + \frac{r^2}{R} e^{-\frac{r}{R}} \right],$$

после чего приходим к полученному ранее выражению для напряженности поля. Она оказывается на бесконечном удалении от точки с наибольшей плотностью заряда, такой, какую создал бы точечный заряд, равный шести зарядам сферы радиусом R и плотностью ϱ_0:

$$E_\infty = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{6Q}{r^2}.$$

6.3. Электростатическое поле и закон Кулона. На практике часто применяется модель точечного электрического заряда. Во-первых, им заменяется заряженное тело, если размеры тела малы по сравнению с расстояниями до точки, в которой рассматривается поле. Во-вторых, в качестве точечного заряда может рассматриваться заряд элемента объема заряженного тела при определении поля, созданного телом.

Потенциал и напряженность поля точечного заряда нами уже находились как решения уравнений Максвелла в интегральной форме и решения уравнений поля в потенциалах (формулы (2.7) и (5.22)). Однако для электростатического поля может быть осуществлена и другая логическая последовательность изложения материала, применяемая, в частности, в школьном курсе. В основу ее кладется закон Кулона для взаимодействия двух точечных зарядов (выведенный нами из уравнений Максвелла):

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r_{1\,2}^2}\,\frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}}.$$

Формула соответствует рисунку 6.2.

Мы введем здесь и используем далее в курсе обозначение, упрощающее запись многих формул:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9\,\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}. \tag{6.9}$$

Условно назовем k кулоновской постоянной.

Итак, ядро электростатики составляет закон Кулона. По определению напряженности поля (1.7) для точечного заряда, расположенного в точке $\vec{r}_0 = 0$, имеем

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}. \tag{6.10}$$

Если ввести потенциал поля формулой

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

то для точечного заряда имеем

$$-\,k\frac{q}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} = \operatorname{grad}\varphi.$$

Умножая обе части последнего равенства на $d\vec{r}$ и интегрируя, получим

$$\int \operatorname{grad}\varphi\, d\vec{r} = -kq\int\frac{\vec{r}d\vec{r}}{r^3},$$

$$\varphi = k\frac{q}{r} + C.$$

Постоянная интегрирования выбирается из условия нормировки $\varphi|_{r\to\infty}=0$. В итоге имеем уже известную формулу потенциала поля точечного заряда:

$$\varphi=k\frac{q}{r}. \tag{6.11}$$

Для любой совокупности дискретных точечных зарядов q_i потенциал и напряженность поля находятся с помощью принципа суперпозиции – наложения полей отдельных зарядов:

$$\varphi(\vec{r})=k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r'_i},\quad \vec{E}(\vec{r})=k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{(r'_i)^2}\frac{\vec{r}'}{r'}. \tag{6.12}$$

(Обозначения см. на рис. 6.3.) Аналогично находятся эти величины для системы зарядов, распределенных непрерывно с плотностью $\varrho(\vec{r}_0)$. Надо лишь разбить систему на элементарные точечные заряды $dQ=\varrho(\vec{r}_0)\,dV_0$. В результате получаем:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\vec{r})&=k\int\frac{\varrho(\vec{r}_0)\,dV_0}{r'},\\ \vec{E}(\vec{r})&=k\int\frac{\vec{r}'\varrho(\vec{r}_0)\,dV_0}{(r')^3}.\end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

(Обозначения см. на рис. 5.3.)

Конечно, рассмотренный сейчас подход к описанию поля гораздо у́же общего подхода, основанного на уравнениях Максвелла, и годится только для электростатического поля. В статическом случае именно точечный заряд рассматривается как некий элементарный источник поля, что весьма наглядно в методическом плане, так как связь поля с зарядами выражается простыми формулами (6.10) и (6.11). Однако в общем случае благодаря явлению запаздывания такая связь чрезвычайно сложна и как исходное теоретическое ядро электродинамики не применяется. Самой простой и универсальной оказывается связь между плотностями токов и зарядов в каждой точке пространства, с одной стороны, и изменением векторов поля в пространстве и времени – с другой. Она и отражена в уравнениях Максвелла.

6.4. Электростатическое поле системы зарядов на большом удалении. Дипольный момент системы.

Несмотря на теоретическую ясность и простоту решения вопроса об электростатическом поле системы зарядов, рассмотренного в предыдущем параграфе, практическое значение формул (6.12) или (6.13) невелико. Их прямое применение возможно лишь в случае систем с небольшим числом точечных зарядов либо с простой зависимостью плотности заряда от положения в пространстве. В противном случае вычисления сумм и интегралов в формулах могут оказаться слишком громоздкими.

Рассмотрим поле системы точечных или непрерывно распределенных зарядов по некоторому конечному объему пространства на большом расстоянии от системы, так что $r \gg r_0$ (рис. 6.4). В этом случае формулы для потенциала и напряженности поля могут быть взяты в приближении и значительно упрощены, а вся система охарактеризована одним или двумя электрическими параметрами, определяющими поле системы (вместо задания полного распределения зарядов).

Получим приближенное значение потенциала в точке $M(\vec{r})$ с помощью формулы (6.13), для чего разложим функцию $\frac{1}{r'} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$ в ряд по степеням малой величины $\vec{r}_0$. Выкладку удобно провести в декартовых координатах, причем для сокращения записей введем обозначения: $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $\alpha = 1, 2, 3$. Функция

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{\alpha=1}^{3} (x_\alpha - x_{0\alpha})^2}}$$

может быть разложена по степеням малых величин $x_{0\alpha}$ в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right) x_{0\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right) x_{0\alpha} x_{0\beta} + \ldots$$

При подстановке последнего выражения в формулу (6.13) получим так называемое мультипольное разложение потенциала:

$$\varphi(\vec{r}) = k \int_{V_0} \frac{\varrho(\vec{r}_0)}{r} dV_0 - k \int_{V_0} \varrho(\vec{r}_0)\, dV_0 \sum_\alpha x_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right) +$$
$$+ \frac{k}{2} \int_{V_0} \varrho(\vec{r}_0)\, dV_0 \sum_{\alpha\beta} x_{0\alpha} x_{0\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Вынесем из-под интегралов величины, не содержащие переменных интегрирования, снабженных индексом 0; во втором и третьем слагаемых поменяем местами суммирование по индексу с интегрированием:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{k}{r} \int_{V_0} \varrho(\vec{r}_0)\, dV_0 - k \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right) \int_{V_0} x_{0\alpha} \varrho(\vec{r}_0)\, dV_0 +$$
$$+ \frac{k}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right) \int_{V_0} x_{0\alpha} x_{0\beta} \varrho(\vec{r}_0)\, dV_0. \tag{6.14}$$

В формуле (6.14) первое слагаемое можно назвать нулевым приближением для потенциала системы. Очевидно, что в этом приближении весь заряд системы считается сосредоточенным в точке O.

Второе слагаемое дополняет потенциал до приближения, называемого дипольным. Оно может быть записано в векторной форме:

$$k\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\int\limits_{V_0}\vec{r}_0\,\varrho(\vec{r}_0)\,dV_0.$$

Величину

$$\vec{p}=\int\limits_{V_0}\vec{r}_0\varrho(\vec{r}_0)\,dV_0 \tag{6.15}$$

называют *дипольным моментом* системы. Для системы n точечных зарядов дипольный момент выражается формулой

$$\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{0i}q_i. \tag{6.16}$$

Третье слагаемое в формуле (6.14) называется квадрупольным приближением (см. ниже). Обычно при разложении поля системы зарядов по мультиполям на большом расстоянии от нее ограничиваются квадрупольным приближением, а во многих задачах — дипольным.

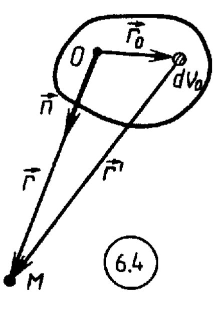
С введением дипольного момента второе слагаемое потенциала системы в соотношении (6.14) выражается формулой

$$\varphi_{\text{Д}}(\vec{r})=-k\,\vec{r}\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)=k\frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3}. \tag{6.17}$$

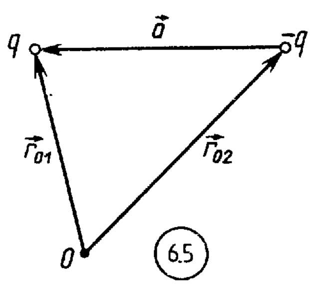
Вводя единичный вектор направления на точку наблюдения $\vec{n}=\frac{\vec{r}}{r}$, получаем

$$\varphi(\vec{r})=k\,\frac{\vec{p}\,\vec{n}}{r^2}. \tag{6.18}$$

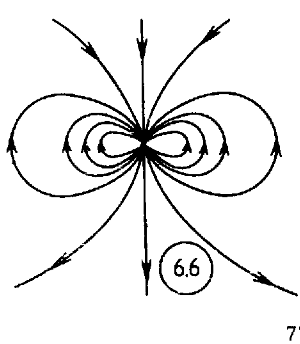
На практике особое значение имеют электронейтральные системы. Таковы атомы и молекулы в нормальном состоянии, незаряженные тела представляют собой электронейтральные системы зарядов. Поле электронейтральной системы, если не учитывать следующие члены разложения, определяется дипольным приближением (6.17). Найдем напряженность поля в дипольном приближении:



6.4



6.5


6.6

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla k\frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3}.$$

После выполнения вычислений (см. формулы П. II)

$$\vec{E} = k\frac{3\vec{n}(\vec{n}\vec{p}) - \vec{p}}{r^3}. \qquad (6.19)$$

Отсюда видно, что напряженность поля в дипольном приближении убывает пропорционально кубу расстояния до системы.

Нетрудно доказать, что для электронейтральной системы дипольный момент не зависит от выбора начала координат (см. пример 6.5). Дипольный момент – важная электрическая характеристика системы в целом. Как поле системы, так и действия внешнего поля на систему (это будет показано ниже, в § 7, п. 7.2) определяются ее дипольным моментом.

Рассмотрим третье слагаемое потенциала в формуле (6.14). Матрицу

$$D_{\alpha\beta} = \int\limits_{V_0} x_{0\alpha}x_{0\beta}\,\varrho(\vec{r}_0)\,dV_0 \qquad (6.20)$$

для непрерывно распределенного заряда системы, или матрицу

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} x_{0\alpha}\,x_{0\beta}\,q_i \qquad (6.21)$$

для системы n точечных зарядов называют *квадрупольным моментом* системы. Квадрупольный член в разложении потенциала (6.14) выражается формулой

$$\varphi_{\text{квд}} = \frac{k}{2}\sum_{\alpha,\,\beta} D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad (6.22)$$

откуда видно, что $\varphi_{\text{квд}}$ пропорционально $\frac{1}{r^3}$; соответственно напряженность поля убывает пропорционально четвертой степени расстояния до системы зарядов. Квадрупольный момент определяет поле электронейтральной системы с нулевым дипольным моментом.

В заключение заметим, что для системы электрических зарядов с $\sum_i q_i \neq 0$ всегда можно выбрать начало координат в точке

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i q_i\vec{r}_{0i}}{\sum_i q_i};$$

тогда в этой системе отсчета $\vec{r}_c = 0$ и $\vec{p} = 0$. Квадрупольный же момент в этом случае не обязательно нулевой.

Пример 6.5. **Дипольный момент системы двух точечных, равных по модулю и противоположных по знаку зарядов.**

С помощью формулы (6.16) и рисунка 6.5 имеем

$$\vec{p} = q_1\vec{r}_{01} + q_2\vec{r}_{02} = q(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}) = q\vec{a}.$$

Значение $\vec{p}$ не зависит от выбора точки O. Такой диполь может рассматриваться как элементарный для электронейтральных систем точечных зарядов; из диполей отдельных пар складывается момент системы, поэтому он и не зависит от выбора начала координат.

Покажем, что дипольный момент системы зарядов, обладающей центром симметрии, равен нулю.

Помещая начало координат в центр симметрии, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \vec{r}_i = 0.$$

Пример 6.6. **Выражение для потенциала и напряженности поля диполя с моментом $\vec{p}$ в сферических координатах.**

Направляя ось Oz по вектору $\vec{p}$, с помощью формул (6.17) и (6.19) имеем

$$\varphi(r, \vartheta) = k\frac{p\cos\vartheta}{r^2}, \quad E_r = k\frac{2p\cos\vartheta}{r^3}, \quad E_\vartheta = k\frac{p\sin\vartheta}{r^3}, \quad E_\alpha = 0.$$

Картина силовых линий диполя изображена на рисунке 6 6.

§ 7. Работа и энергия электростатического поля. Сила, действующая на жестную систему зарядов

7.1. Система зарядов во внешнем электростатическом поле. Работа и потенциальная энергия. Перейдем к изучению энергетических соотношений для электростатического поля. Прежде всего найдем работу, которую совершает сила, действующая со стороны поля на заряд, помещенный в поле. Этот вопрос в общем виде рассматривался в § 3, п. 3.1, а сейчас выясним его применительно к частному случаю постоянного потенциального поля $\vec{E}$. Напомним, что в поле вносится точечный заряд, не изменяющий поля. Поле по отношению к нему является внешним, т. е. создано другими зарядами. Элементарная работа поля по перемещению точечного заряда q в электростатическом поле определяется формулой

$$\delta A = q\vec{E}d\vec{r} = -q\,\mathrm{grad}\,\varphi d\vec{r} = -qd\varphi, \tag{7.1}$$

а работа поля на конечном перемещении –

$$A_{1,2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{7.2}$$

Таким образом, работа определяется разностью потенциалов точек начала и конца перемещения и не зависит от траектории. Разность потенциалов в электростатическом поле оказывается измеряемой физической величиной, однозначно связанной с работой, и наряду с напряженностью служит важной характеристикой поля.

В соответствии с формулой (7.2) целесообразно введение понятия потенциальной энергии заряда в точке поля:

$$U(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r}). \tag{7.3}$$

Формула (7.3) обобщается на систему зарядов во внешнем поле:

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_i q_i \varphi(\vec{r}_i), \\ U &= \int_V \varrho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\,dV. \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$