Помещая начало координат в центр симметрии, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \vec{r}_i = 0.$$

Пример 6.6. **Выражение для потенциала и напряженности поля диполя с моментом $\vec{p}$ в сферических координатах.**

Направляя ось Oz по вектору $\vec{p}$, с помощью формул (6.17) и (6.19) имеем

$$\varphi(r, \vartheta) = k\frac{p\cos\vartheta}{r^2}, \quad E_r = k\frac{2p\cos\vartheta}{r^3}, \quad E_\vartheta = k\frac{p\sin\vartheta}{r^3}, \quad E_\alpha = 0.$$

Картина силовых линий диполя изображена на рисунке 6 6.

§ 7. Работа и энергия электростатического поля. Сила, действующая на жестную систему зарядов

7.1. Система зарядов во внешнем электростатическом поле. Работа и потенциальная энергия. Перейдем к изучению энергетических соотношений для электростатического поля. Прежде всего найдем работу, которую совершает сила, действующая со стороны поля на заряд, помещенный в поле. Этот вопрос в общем виде рассматривался в § 3, п. 3.1, а сейчас выясним его применительно к частному случаю постоянного потенциального поля $\vec{E}$. Напомним, что в поле вносится точечный заряд, не изменяющий поля. Поле по отношению к нему является внешним, т. е. создано другими зарядами. Элементарная работа поля по перемещению точечного заряда q в электростатическом поле определяется формулой

$$\delta A = q\vec{E}d\vec{r} = -q \operatorname{grad}\varphi d\vec{r} = -qd\varphi, \tag{7.1}$$

а работа поля на конечном перемещении –

$$A_{1,2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{7.2}$$

Таким образом, работа определяется разностью потенциалов точек начала и конца перемещения и не зависит от траектории. Разность потенциалов в электростатическом поле оказывается измеряемой физической величиной, однозначно связанной с работой, и наряду с напряженностью служит важной характеристикой поля.

В соответствии с формулой (7.2) целесообразно введение понятия потенциальной энергии заряда в точке поля:

$$U(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r}). \tag{7.3}$$

Формула (7.3) обобщается на систему зарядов во внешнем поле:

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_i q_i \varphi(\vec{r}_i), \\ U &= \int_V \varrho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\,dV. \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

(Если заряды, создающие поле, не рассматриваются в задаче, то необходимость в различных обозначениях для точек пространства $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ отпадает. Поэтому в формулах (7.3), (7.4) и использовано единое обозначение для координат точки пространства, в которой указан потенциал $\varphi(\vec{r})$ и задан заряд $\varrho(\vec{r})$.)

Если внешнее поле $\varphi(\vec{r})$ изменяется достаточно плавно, а размеры системы невелики, то для любой точки $\vec{r}$ в пределах системы выполняется неравенство (рис. 7.1)

$$\left|\frac{\varphi(\vec{r}_0+\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0)}{\varphi(\vec{r}_0)}\right| \ll 1. \tag{7.5}$$

Неравенство (7.5) служит условием применимости интегральных характеристик системы – полного заряда, дипольного момента – для приближенного описания ее взаимодействия с внешним полем.

Выбирая некоторую точку $\vec{r}_0$ внутри системы (рис. 7.1), имеем для потенциала приближенное выражение

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0 + \vec{r}\,') \approx \varphi(\vec{r}_0) + \vec{r}\,' \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}_0) + \ldots$$

Подставим это разложение в формулу (7.4):

$$U = \varphi(\vec{r}_0) \sum_i q_i - \vec{E}(\vec{r}_0) \sum_i \vec{r}_i\,' q_i + \ldots \tag{7.6}$$

Первое слагаемое совпадает с величиной энергии точечного заряда $\sum_i q_i$ – система принимается за точку, помещенную в точку пространства $\vec{r}_0$. Для заряженной системы при условии (7.5) этой величиной в разложении (7.6) можно ограничиться. Но для электронейтральных систем $\sum_i q_i = 0$; в расчет принимается основное теперь второе слагаемое

$$U(\vec{r}) = -\vec{p}\,\vec{E}(\vec{r}_0), \tag{7.7}$$

т. е. потенциальная энергия определяется дипольным моментом системы $\vec{p}$ и напряженностью внешнего поля, в точку $\vec{r}_0$ которого малая (точечная) система помещена.

7.2. Силы, действующие на жесткую систему зарядов во внешнем поле. Формулы (7.6) и (7.7) предыдущего параграфа дают выражения для энергии системы зарядов через ее интегральные характеристики – заряд системы и ее дипольный момент. Нужно сделать, однако, важную оговорку: формулы имеют смысл, если положение зарядов в системе фиксировано; система как целое определена некими связями между зарядами неэлектростатического происхождения, т. е. дипольный момент ее не изменяется, когда она вносится во внешнее поле. С учетом этих обстоятельств можно поставить вопрос о силе, действующей на систему зарядов как на твердое тело. Она равна равнодействующей сил, действующих на отдельные заряды:

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_i.$$

В приближении точечной системы

$$\vec{F} = \vec{E}(\vec{r}_0) \sum_i q_i.$$

Силу, действующую на электронейтральную систему, характеризующуюся дипольным моментом $\vec{p}$, проще всего найти, опираясь на формулу (7.7). Так как силы, действующие в электростатическом поле, удовлетворяют условию для потенциальных сил (см. [1], ч. I, § 11, п. 11.6):

$$\operatorname{rot}(q\vec{E}) = 0,$$

то для нахождения $\vec{F}$ можно воспользоваться формулой (см. [1], ч. I, (11.4))

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U,$$

откуда в нашем случае

$$\vec{F} = \operatorname{grad}(\vec{p}\,\vec{E}).$$

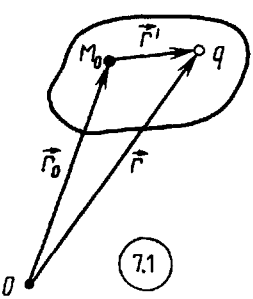
При вычислении применим тождество (П. II, 29) и учтем, что $\vec{p}$ от $\vec{r}$ не зависит, а $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$. И окончательно

$$\vec{F} = (\vec{p}\,\nabla)\,\vec{E}(\vec{r}). \qquad (7.8)$$

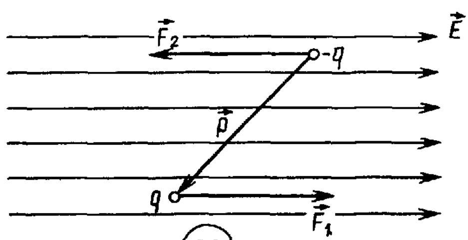
Важная особенность формулы (7.8) состоит в том, что $\vec{F} \neq 0$ только при условии, что электростатическое поле изменяется от точки к точке пространства, т. е. оно неоднородно.

Из курса механики известно, что произвольная система сил, действующих на твердое тело, сводится к главному вектору $\vec{F}$ и к главному моменту $\vec{M}$ (см. [1], § 17, п. 17.1). В механическом плане M – обобщенная потенциальная сила (см. [1], ч. I, § 19, пп. 19.4 и 19.5). Выбирая в качестве обобщенной координаты угол ϑ между векторами $\vec{E}$ и $\vec{p}$, имеем

$$M = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta}(pE\cos\vartheta) = -pE\sin\vartheta.$$



7.1



7.2

Чтобы установить направление вектора $\vec{M}$, рассмотрим однородное поле $\vec{E}$ и простейший диполь, состоящий из двух разноименных, равных по модулю зарядов, помещенный в поле (рис. 7.2). Из анализа взаимного направления векторов $\vec{F}_1$, $\vec{E}$ и $\vec{p}$ следует

$$\vec{M} = [\vec{p}\,\vec{E}]. \tag{7.9}$$

(Отсюда же видно, что предыдущее выражение есть проекция момента силы на ось, перпендикулярную диполю, или момент силы относительно этой оси.) Для электронейтральной системы момент не зависит от выбора моментной точки.

В однородном поле на систему с дипольным моментом $\vec{p}$ действует только момент силы $\vec{M}$, стремящийся установить вектор $\vec{p}$ в направлении поля. В неоднородном поле к моменту добавляется равнодействующая $\vec{F}$, зависящая как от ориентации вектора $\vec{p}$, так и от разности значений напряженности в точках расположения зарядов системы.

Пример 7.1. **Вычисление энергии, момента и силы для диполя.**

Электрический диполь с моментом $\vec{p}$ находится в поле точечного заряда q на расстоянии r от него. Найдем энергию диполя в этом поле, момент сил и силу, действующую на диполь.

Напряженность поля точечного заряда выражается формулой (6.10). Используя выражения (7.7) и (7.9), имеем

$$U = -kq\frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3} = -\frac{kqp\cos\vartheta}{r^2},$$

$$\vec{M} = \frac{kq}{r^3}[\vec{p}\,\vec{r}], \quad M_\vartheta = -\frac{kqp}{r^2}\sin\vartheta.$$

Для нахождения силы применим формулу $\vec{F} = -\operatorname{grad} U$. Получим

$$\vec{F} = kq\operatorname{grad}\left(\frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3}\right) = kq\frac{\vec{p}}{r^3} - 3kqp\frac{\cos\vartheta}{r^4}\vec{r}.$$

7.3. Энергия взаимодействия зарядов и энергия электростатического поля. Выше, в § 6, п. 6.3, говорилось, что в рамках статических проявлений поля такая его принципиальная особенность, как конечное значение скорости передачи взаимодействий, остается нераскрытой, ибо не проявляется именно из-за стационарности взаимодействия поля и зарядов.

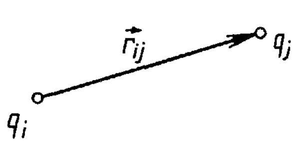
Так же в духе механического дальнодействия можно подойти и к вопросу об энергии взаимодействия между собой электрических зарядов в системе — это будет потенциальная энергия системы. Используя формулу (7.3) и принцип суперпозиции полей, созданных отдельными зарядами системы, имеем

$$W_{\text{эл}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i, \tag{7.10}$$

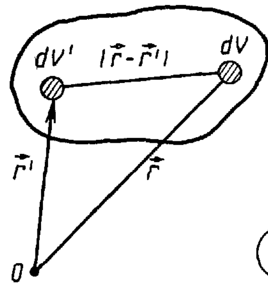
где

$$\varphi_i = k\sum_{j \neq i}\frac{q_j}{r_{ij}} -$$

потенциал, созданный остальными зарядами в точке расположения



7.3



7.4

i-го заряда (рис. 7.3). Подставляя значение φ_i в (7.10), получим также

$$W_{эл}=\frac{k}{2}\sum_i\sum_j\frac{q_iq_j}{r_{ij}}. \tag{7.11}$$

Такова энергия взаимодействия системы зарядов. Она складывается из энергии взаимодействия отдельных пар:

$$w_{ij}=k\,\frac{q_iq_j}{r_{ij}}. \tag{7.12}$$

Что касается происхождения коэффициента $\frac{1}{2}$ в формулах (7.10) и (7.11), то он ставится потому, что при суммировании по i и j пары перечисляются дважды.

Для энергии системы зарядов, непрерывно распределенных в пространстве, получим соответствующие формулы.

Величину

$$\frac{k\,\varrho(\vec{r})\,dV\,\varrho(\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

можно рассматривать как энергию взаимодействия точечных зарядов $dQ=\varrho(\vec{r})\,dV$ и $dQ'=\varrho(\vec{r}')\,dV'$, расположенных в точках $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ (рис. 7.4). Поэтому для непрерывно распределенного по объему V заряда имеем

$$W_{эл}=\frac{k}{2}\int\limits_V\int\limits_{V'}\frac{\varrho(\vec{r})\,\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV\,dV'. \tag{7.13}$$

Аналогично вместо формулы (7.10) получим

$$W_{эл}=\frac{1}{2}\int\limits_V\varrho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\,dV, \tag{7.14}$$

где

$$\varphi(\vec{r})=k\int\limits_{V'}\frac{\varrho(\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

– потенциал, создаваемый в точке $\vec{r}$ элементами непрерывно распределенного заряда.

Между формулами (7.11) и (7.13) имеется существенная разница. В формуле (7.11) энергия взаимодействия частей дискретного точечного заряда q_i между собой не учитывается, так как пространственно точечный заряд неделим. В формулу же (7.13) входит энергия взаимодействия бесконечно малых частей ϱdV непрерывного заряда Q в объеме V

Подход к энергии системы зарядов может быть осуществлен и с иных позиций: вместо потенциальной энергии взаимодействия системы зарядов (7.11) и (7.13) можно рассмотреть энергию созданного ими поля. Используя формулу (3.8), имеем

$$W_{эл} = \frac{1}{2} \int_{\infty} \varepsilon_0 E^2 dV. \tag{7.15}$$

(В формуле (7.15) интегрировать нужно по всему пространству, чтобы учесть все поле, созданное системой зарядов.)

Докажем важное утверждение: *потенциальная энергия системы зарядов сводится к энергии поля, созданного этой системой.* В формуле (7.14) с помощью уравнений Максвелла произведем замену $\varrho = \varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E}$:

$$W_{эл} = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 \varphi \operatorname{div}\vec{E} dV = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 \operatorname{div}(\varphi\vec{E}) -$$
$$- \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 \vec{E} \operatorname{grad}\varphi dV = \frac{1}{2}\oint_S \varepsilon_0 \varphi \vec{E}\, \vec{dS} + \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 E^2 dV.$$

Для ограниченной по размерам системы зарядов при $r \to \infty$ $\varphi \to 0$ как $\frac{1}{r}$, а $E \to 0$ как $\frac{1}{r^2}$, тогда как сдвигаемая в бесконечность поверхность S, ограничивающая объем V, растет пропорционально r^2. Поэтому в правой части первое слагаемое обращается в нуль и

$$W_{эл} = \frac{1}{2}\int \varepsilon E^2 dV.$$

Таким образом, утверждение доказано и можно заключить, что потенциальная энергия системы является по своей природе энергией электростатического поля.

Применим формулу (7.11) к системе, состоящей из двух зарядов:

$$W_{эл} = k\frac{q_1 q_2}{r_{1,2}}.$$

Отсюда видно, что потенциальная энергия нормирована на нуль при бесконечном удалении зарядов друг от друга. Это наибольшее значение энергии, если заряды разноименны и притягиваются. Соответственно при одноименных зарядах это будет наименьшим значением энергии, а энергия взаимодействия тем больше, чем ближе сдвинуты заряды.

Если заряды неограниченно сближаются $(r_{1,2} \to 0)$, то $W_{эл} \to \infty$. То же относится и к энергии поля системы точечных зарядов: ее абсолютное значение оказывается бесконечным, так как напряженность поля при неограниченном приближении к любому точечному заряду стремится к бесконечности. Но формула (7.14) всегда дает конечные значения энергии. Это значит, что расходимости возникают вследствие использования точечной модели электрического заряда. Бесконечные значения энергии физически никак не интерпретируются. Они не мешают пользоваться формулами для энергии до тех пор, пока не требуются полные ее значения. Дело в том, что измеряется и имеет физические проявления в известных нам процессах только разность энергий системы для двух каких-либо ее состояний. Изменения же энергии при переходе между состояниями всегда оказываются конечными.

Если же в расчет входит полная энергия системы зарядов, то следует воспользоваться моделью непрерывно распределенных по пространству зарядов. Однако понятие непрерывно распределенных по пространству зарядов применимо лишь в макроскопической физике. В тех же рамках служат и формулы (7.13), (7.14), (7.15).

В этой связи напомним, что в истории науки известны попытки распространить теорию Максвелла на микрочастицы. Так, обсуждались модели электрона в виде жесткого шарика определенного радиуса с равномерно распределенным зарядом (М. Абрагам, 1902 г.). Если рассчитать энергию поля, созданного таким электроном, то она окажется равной (см. пример 7.2):

$$W = \frac{3ke^2}{5r_0}.$$

Вся масса электрона считалась имеющей электромагнитное происхождение, т. е. она связана с энергией поля электрона соотношением Эйнштейна

$$\frac{3ke^2}{5r_0} = mc^2$$

Отсюда следует значение для так называемого классического радиуса электрона:

$$r_0 = \frac{3ke^2}{5mc^2} \approx \frac{ke^2}{mc^2} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$$

Такая модель электрона может быть названа классической. Она оказывается несостоятельной по ряду причин. В частности, совершенно не понятно, какие силы удерживают заряженные «части» электрона, преодолевая огромные силы их электростатического отталкивания друг от друга. По современным представлениям электрон – точечный объект. Классический же радиус r_0 сейчас играет роль предела применимости классической электродинамики к взаимодействию на малых расстояниях. (На самом деле применимость классической электродинамики ограничена большими, чем классический радиус, расстояниями вследствие квантовых эффектов.)

В методологическом плане полезно представить энергию поля системы зарядов как сумму собственной энергии (поля) зарядов и энергии их взаимодействия. Такой прием позволяет до некоторой степени уточнить понятие потенциальной энергии как определенной части энергии поля системы. В данном контексте собственной энергией называют энергию поля, созданного отдельным зарядом. Рассмотрим простейшую систему двух зарядов, создавших поля $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Соответственно их собственные энергии выражаются формулами

$$W_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_1^2 dV, \qquad W_2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_2^2 dV.$$

Поле, созданное обоими зарядами при совместном их действии, имеет напряженность

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

откуда

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2,$$

и для энергии поля имеем выражение

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_1^2 dV + \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_2^2 dV + \varepsilon_0\int \vec{E}_1\vec{E}_2 dV.$$

Слагаемое

$$W_{1,2} = \varepsilon_0 \int \vec{E}_1\vec{E}_2 dV$$

называют энергией взаимодействия.

Вся энергия поля системы двух зарядов

$$W = W_1 + W_2 + W_{1,2}$$

всегда положительна, а вот энергия взаимодействия может быть и отрицательна. Энергия системы разноименных зарядов тем меньше, чем меньше расстояние между ними, именно за счет отрицательной энергии взаимодействия; энергия системы одноименных зарядов тем больше, чем меньше расстояние, за счет положительной энергии взаимодействия.

Пример 7.2. **Вычисление энергии поля равномерно заряженного шара.**

Пусть плотность объемных зарядов ϱ, а радиус шара a. Пользуясь формулами для напряженности поля такого шара (пример 6.1)

$$E = \frac{\varrho r}{3\varepsilon_0}, \qquad r \leq a; \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \qquad r > a$$

и применяя формулу для энергии поля (7.15), получаем

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} 4\pi \int_0^a \left(\frac{\varrho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2} 4\pi \int_a^\infty \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)^2 r^2 dr = \frac{3kQ^2}{5a}.$$

Пример 7.3. **Выяснение смысла коэффициента $\frac{1}{2}$.**

Сравним энергию системы двух точечных зарядов, вычисленную по формулам (7.10) и (7.11). С помощью формулы (7.10) получаем

$$W = \frac{1}{2}(\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{kq_2q_1}{r_{1,2}} + \frac{kq_1q_2}{r_{1,2}}\right) = \frac{kq_1q_2}{r_{1,2}},$$

что совпадает со значением, найденным по формуле (7.11).

Пример 7.4. **Вычисление работы, совершаемой полем точечного заряда q_1, по удалению другого точечного заряда q_2 из некоторой точки в бесконечность.**

Выбирая начало координат в точке расположения первого заряда, имеем для напряженности его поля значение

$$\vec{E} = k\frac{q_1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Определяя силу, действующую на второй заряд со стороны поля, находим работу:

$$A = \int_r^\infty k\frac{q_1q_2}{r^2}dr = k\frac{q_1q_2}{r}.$$

Это выражение совпадает с формулой энергии системы двух точечных зарядов (7.12).

Сравнивая также с формулой энергии (7.10), находим, что потенциал поля заряда q_1 выражается известным нам соотношением

$$\varphi_1 = k\frac{q_1}{r}.$$

Однако теперь ясна целесообразность его нормировки: энергия точечного заряда $q_2\varphi$ равна работе по удалению заряда в бесконечность только при условии $\varphi = 0$, $r \to \infty$.

§ 8. Магнитостатическое поле в вакууме

8.1. Уравнения магнитостатического поля в потенциалах. Магнитостатическое поле возникает в случае движения зарядов в пространстве с постоянной во времени плотностью токов. Его исходными уравнениями являются уравнения (6.5). Для векторного потенциала магнитного поля может быть использовано эквивалентное уравнение

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \tag{8.1}$$

причем

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \tag{8.2}$$

Решение его (6.2) найдено ранее:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{r'}\,dV_0. \tag{8.3}$$

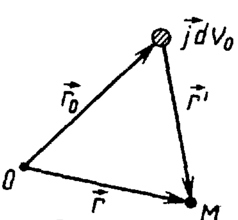
(Обозначения в формуле (8.3) соответствуют рис. 8.1.)

Что касается общего решения, складывающегося из выражения (8.3) и общего решения уравнения Лапласа $\Delta \vec{A} = 0$, то оно мало употребительно для системы зарядов в вакууме, где обычно имеют дело с полем, созданным токами рассматриваемой системы, $\vec{j}(\vec{r}_0)$, а внешнее стационарное поле отсутствует.

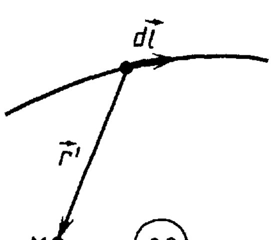
Наконец, в отдельных случаях при симметричном распределении токов в пространстве применяется интегральная форма первого уравнения (6.5)

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I, \tag{8.4}$$

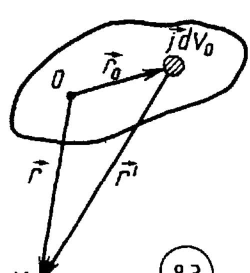
где I – ток, пронизывающий контур L, по которому вычислена циркуляция вектора $\vec{B}$.



8.1



8.2



8.3