Сравнивая также с формулой энергии (7.10), находим, что потенциал поля заряда q_1 выражается известным нам соотношением

$$\varphi_1 = k\frac{q_1}{r}.$$

Однако теперь ясна целесообразность его нормировки: энергия точечного заряда $q_2\varphi$ равна работе по удалению заряда в бесконечность только при условии $\varphi = 0$, $r \to \infty$.

§ 8. Магнитостатическое поле в вакууме

8.1. Уравнения магнитостатического поля в потенциалах. Магнитостатическое поле возникает в случае движения зарядов в пространстве с постоянной во времени плотностью токов. Его исходными уравнениями являются уравнения (6.5). Для векторного потенциала магнитного поля может быть использовано эквивалентное уравнение

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \tag{8.1}$$

причем

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \tag{8.2}$$

Решение его (6.2) найдено ранее:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{r'}\, dV_0. \tag{8.3}$$

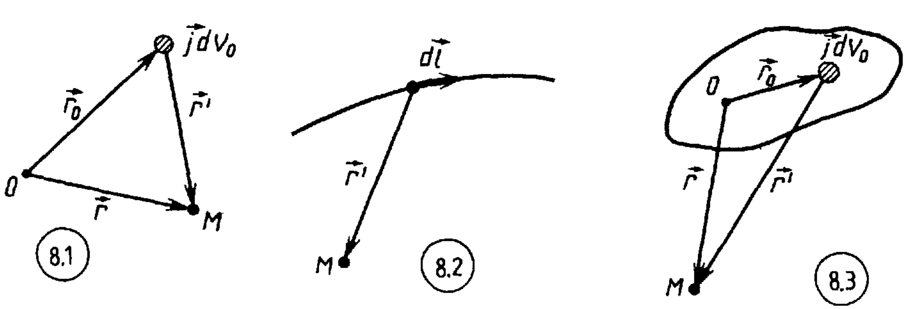
(Обозначения в формуле (8.3) соответствуют рис. 8.1.)

Что касается общего решения, складывающегося из выражения (8.3) и общего решения уравнения Лапласа $\Delta \vec{A} = 0$, то оно мало употребительно для системы зарядов в вакууме, где обычно имеют дело с полем, созданным токами рассматриваемой системы, $\vec{j}(\vec{r}_0)$, а внешнее стационарное поле отсутствует.

Наконец, в отдельных случаях при симметричном распределении токов в пространстве применяется интегральная форма первого уравнения (6.5)

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I, \tag{8.4}$$

где I – ток, пронизывающий контур L, по которому вычислена циркуляция вектора $\vec{B}$.



8.2. Векторный потенциал и индукция магнитостатического поля. Рассчитаем индукцию вихревого магнитостатического поля, пользуясь его потенциалом (8.3). Введем также обозначение, значительно сокращающее записи:

$$f = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{А}^2\ \text{с}^2}, \tag{8.5}$$

и назовем f *индукционной постоянной.* (Необходимо заметить, что использование константы f, как, впрочем, и введенной нами ранее константы k, системой единиц СИ не предусмотрено. Мы вводим названные константы для упрощения формул, весьма громоздких из-за входящих в них коэффициентов в системе СИ. Для того чтобы придать любой формуле стандартный для СИ вид, достаточно подставить в нее значения констант.) Из равенства $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ следует также соотношение

$$k = c^2 f.$$

Воспользовавшись формулой (8.2), рассчитаем индукцию магнитостатического поля по выражению для векторного потенциала:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}_r \vec{A} = f \int \operatorname{rot}_r \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)\, dV_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} =$$

$$= f \int \left[\operatorname{grad}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\, \vec{j}(\vec{r}_0)\right] dV_0 =$$

$$= f \int \frac{-\,[(\vec{r} - \vec{r}_0)\, \vec{j}(\vec{r}_0)]}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}\, dV_0.$$

(Обозначения соответствуют рис. 8.1. Индекс r у знака ротора и градиента указывает, что нужно дифференцировать по координатам точки M.) Окончательно

$$\vec{B} = f \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}_0)\, \vec{r}\,']}{(r')^3}\, dV_0. \tag{8.6}$$

Эта формула индукции магнитостатического поля имеет физический смысл для произвольного, но ограниченного по размерам распределения токов в пространстве. (Она в определенной мере аналогична формуле напряженности электростатического поля (6.13), но вместо плотности заряда в ней стоят плотность тока и векторное произведение $[\vec{j}\,\vec{r}\,']$.)

Пример 8.1. **Магнитное поле постоянного линейного тока.**

На практике характерно использование токов в проводниках, поперечное сечение которых мало по сравнению с длиной. В примере 1.7 было показано, что элемент линейного тока выражается формулой

$$\vec{j}dV = Id\vec{l}.$$

Согласно формуле (8 6) индукция магнитного поля линейных токов определяется соотношением

$$\vec{B} = fI \int\limits_L \frac{[\vec{dl}\,\vec{r}']}{(r')^3}.$$

Это же соотношение представим в дифференциальной форме

$$d\vec{B} = fI \frac{[\vec{dl}\,\vec{r}']}{(r')^3}, \tag{8.6-а}$$

где I — сила тока, r' — расстояние от элемента тока до точки наблюдения (рис. 8.2) Получили известное из общего курса физики выражение закона Био-Савара для магнитного поля тока.

8.3. Магнитное поле в дипольном приближении. Рассмотрим систему зарядов, совершающих стационарное движение в некоторой конечной области пространства. Из уравнения непрерывности (1.6) и условий стационарности движения зарядов $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ следует равенство

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0. \tag{8.7}$$

Это означает, что поле вектора плотности тока $\vec{j}$ соленоидально, линии тока замкнуты.

Разобьем весь объем системы на замкнутые трубки тока малого сечения, стенки таких трубок образованы линиями тока. Для тонкой трубки справедливо соотношение

$$\vec{j}_i dV_i = I_i \vec{dl}_i,$$

где I_i — постоянная по всей длине трубки сила тока. При расчетах любой интеграл по объему системы разбивается на сумму интегралов по трубкам тока. Как следствие получаем

$$\int\limits_V \vec{j} dV = \sum_i \int \vec{j}_i dV_i = \sum_i I_i \oint\limits_L \vec{dl}_i = 0, \tag{8.8}$$

так как для замкнутых кривых $\oint\limits_L \vec{dl} = 0$. Формула (8.8) также является условием стационарности движения зарядов в системе, она будет использована нами ниже в решении задачи о магнитном поле системы токов на больших расстояниях от нее.

Допустим, что размеры системы много меньше расстояния от нее до точки наблюдения (рис. 8.3). При $r \gg r_0$ разложим $\frac{1}{r'}$ в ряд по степеням малой величины r_0. Ограничимся первыми двумя членами разложения. Такая выкладка уже была сделана в § 6, п. 6.4. Здесь приведем готовый результат:

$$\frac{1}{r'} \approx \frac{1}{r} - \vec{r}_0 \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}_0\vec{r}}{r^3}.$$

Подставив это выражение в формулу (6.2), получаем

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{f}{r} \int\limits_{V_0} \vec{j}(\vec{r}_0) dV_0 + \frac{f}{r^3} \int\limits_{V_0} \vec{j}(\vec{r}_0)(\vec{r}_0\vec{r}) dV_0.$$

Согласно формуле (8.8) первое слагаемое равно нулю и

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{f}{r^3} \int\limits_{V_0} \vec{j}(\vec{r}_0)(\vec{r}_0\vec{r}) dV_0. \tag{8.9}$$

Преобразуем подынтегральное выражение с помощью тождества:

$$\vec{j}(\vec{r}_0\vec{r}) = \frac{1}{2}\{\vec{j}(\vec{r}_0\vec{r}) - \vec{r}_0(\vec{j}\vec{r})\} + \frac{1}{2}\{\vec{j}(\vec{r}_0\vec{r}) + \vec{r}_0(\vec{j}\vec{r})\}.$$

Первая фигурная скобка есть не что иное, как $[[\vec{r}_0\vec{j}]\vec{r}]$, а интеграл от второй скобки обращается в нуль (см. ниже, петит). Выражение для потенциала приобретает вид

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{f}{r^3} \int\limits_{V_0} \frac{[[\vec{r}_0\vec{j}]\vec{r}]}{2} dV_0 = \frac{f}{r^3} \left[\int\limits_{V_0} \frac{[\vec{r}_0\vec{j}]}{2} dV_0 \vec{r} \right] \tag{8.10}$$

Покажем, что интеграл во второй фигурной скобке по объему системы равен нулю. Для этого используем тот же прием, что и для доказательства формулы (8.8). У нас

$$\int \{\vec{j}(\vec{r}_0\vec{r}) + \vec{r}_0(\vec{j}\vec{r})\} dV_0 = \sum_i I_i \oint\limits_{L_i} \{\vec{dl}_i(\vec{r}_0\vec{r}) + \vec{r}_0(\vec{dl}_i\vec{r})\} =$$

$$= \sum_i I_i \oint\limits_{L_i} \{d\vec{r}_0(\vec{r}_0\vec{r}) + \vec{r}_0(d\vec{r}_0\vec{r})\} = \sum_i I_i \oint\limits_{L_i} d\{\vec{r}_0(\vec{r}_0\vec{r})\} = 0.$$

Целесообразно ввести обозначение:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int\limits_{V_0} [\vec{r}_0\vec{j}] dV_0. \tag{8.11}$$

Эту величину называют дипольным магнитным моментом системы. Через дипольный момент формула потенциала приобретает вид

$$\vec{A} = f\frac{[\vec{m}\vec{r}]}{r^3} = f\frac{[\vec{m}\vec{n}]}{r^2}, \tag{8.12}$$

где

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Нетрудно в этом приближении найти и индукцию магнитостатического поля:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = f\left(\vec{m}\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} - (\vec{m}\nabla)\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

После выкладки получаем

$$\vec{B} = f\frac{3\vec{n}(\vec{m}\vec{n}) - \vec{m}}{r^3}. \tag{8.13}$$

Заметим, что формула (8.13) аналогична формуле (6.19) для напряженности электростатического поля при электронейтральной системе зарядов в дипольном приближении. Имеются, однако, принципиальные отличия магнитостатического и электростатического полей. Во-первых, «нулевого» приближения для магнитного поля нет, так как нет магнитных зарядов: систему токов можно лишь условно уподобить некоторой нейтральной системе фиктивных «магнитных» зарядов. Во-вторых, аналогия ограничивается только дипольным приближением.

Пример 8.2. **Магнитный момент кольцевого линейного тока.**

С помощью формулы (8.11) запишем·

$$\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint_L [\vec{r}_0 d\vec{l}].$$

Так как $\frac{1}{2}[\vec{r}_0 d\vec{l}] = d\vec{S}$, а контур плоский (рис. 8.4), то

$$\vec{m} = I\vec{S}.$$

Пример 8.3. **Магнитный момент точечного заряда *e*, движущегося по окружности радиусом *r* со скоростью *v*.**

Формулу из примера 8.2 можно применить к средней силе тока, образованного движением заряда

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r},$$

и

$$m_e = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{evr}{2}$$

Таково с точки зрения классической электродинамики значение орбитального магнитного момента электрона. Заметим, что момент импульса электрона равен mvr. Отношение магнитного момента к механическому равно постоянной $\frac{e}{2m}$. Эту величину называют гиромагнитным отношением для электрона.

8.4. Энергия системы движущихся зарядов во внешнем магнитном поле. Сила, действующая на систему. Ранее было показано, что магнитная составляющая силы Лоренца при перемещении точечного электрического заряда работы не совершает (см. § 3, п. 3.1). Это, однако, не означает, что система зарядов, находящаяся во внешнем магнитном поле, не может обладать энергией. Силы, действующие на токи как на системы движущихся зарядов, подчиненных определенным связям, могут совершать работу.

Для получения формулы энергии системы во внешнем магнитном поле (в дипольном приближении) будем исходить из двух допущений:

1. Система характеризуется магнитным моментом, который не изменяется во внешнем поле (т. е. система токов обладает некоторой «жесткостью», обусловленной, как и в электростатическом поле, связями, обеспечивающими заданную конфигурацию токов).

2. Поскольку магнитное поле в дипольном приближении вполне аналогично электростатическому (ср. формулы (8.13) и (6.19)), то формально можно считать систему токов в ограниченной области пространства в дипольном приближении эквивалентной некоторой системе магнитных зарядов, распределенных с плотностью ϱ_m, причем в целом система нейтральна, и $\int_{V_0} \varrho_m dV_0 = 0$.

В таком случае магнитный момент системы определяется через фиктивные магнитные заряды с помощью выражений, аналогичных соотношениям (6.15) и (6.16). Магнитное поле создается этими зарядами в соответствии с формулами электростатики, а энергия системы в поле определяется формулой

$$U = -\vec{m}\vec{B}. \tag{8.14}$$

Понятно, что сила и момент силы, действующие на систему токов как целое, определяются соотношениями, аналогичными (7.8) и (7.9):

$$\vec{F} = (\vec{m}\nabla)\,\vec{B}; \tag{8.15}$$

$$\vec{M} = [\vec{m}\vec{B}]. \tag{8.16}$$

После того как формулы (8.15) и (8.16) получены, надобность в фиктивных магнитных зарядах отпадает, а величины $\vec{B}$ и $\vec{m}$ рассчитываются без учета магнитных зарядов по формулам (8.6) и (8.11) для того или иного распределения токов $\vec{j}\,(\vec{r}_0)$.

8.5. Энергия магнитостатического поля. Положим $\vec{E} = 0$ в формуле электромагнитного поля (3.8). Тогда

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2 dV.$$

Энергию постоянного магнитного поля можно свести к энергии взаимодействия токов. С этой целью совершим ряд преобразований.

Заменяя B^2 на равную величину $\vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}$ и применяя тождество

$$\mathrm{div}\,[\vec{A}\vec{B}] = \vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\,\mathrm{rot}\,\vec{B},$$

имеем

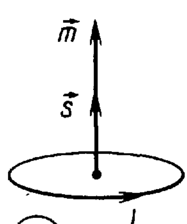
$$B^2 = \vec{A}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} + \mathrm{div}\,[\vec{A}\vec{B}].$$

Учтем также, что

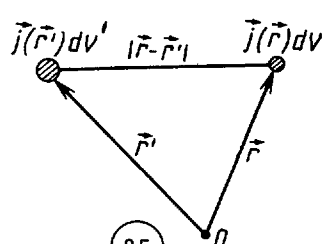
$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}.$$

Подставим найденное выражение для B^2 в интеграл энергии. Применяя теорему Гаусса (П. II, 34), получим

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2}\int \vec{A}\vec{j}\,dV + \frac{1}{2\mu_0}\oint_S [\vec{A}\vec{B}]\cdot d\vec{S}.$$



8.4



8.5

При вычислении поверхностного интеграла следует перейти к пределу, когда поверхность S сдвигается в бесконечность. Так как поле на бесконечности равно нулю, то это слагаемое исчезает. В первом интеграле можно ограничить область интегрирования частью пространства, где $\vec{j} \neq 0$. Итак

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} \int \vec{A}\vec{j} dV. \tag{8.17}$$

Формула (8.17) по смыслу аналогична формуле (7.14) для электростатического поля. Она может быть переписана с помощью выражения для потенциала (6.2) в виде

$$W_{\text{маг}} = \frac{f}{2} \int\limits_V \int\limits_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r})\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV dV'. \tag{8.18}$$

Снова замечаем сходство с электростатикой (см. формулу (7.13)), только здесь вместо элементарных зарядов ϱdV взаимодействуют элементы тока $\vec{j}dV$. (Обозначения соответствуют рис. 8.5.)

Таким образом, энергия магнитного поля свелась к энергии взаимодействия токов между собой; усматривается аналогия с энергией взаимодействия электрических зарядов на расстоянии. (Однако следует помнить, что магнитное поле непотенциально.)

Полезно сопоставить формулу для энергии взаимодействия электрических зарядов (7.13) с формулой (8.18), придав последней вид

$$W_{\text{маг}} = \frac{f}{2} \int\limits_V \int\limits_{V'} \frac{\varrho(\vec{r})\vec{v}\varrho(\vec{r}\,')v'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV dV'.$$

Так как k больше f в $9 \cdot 10^{16}$ раз, то при малых скоростях движения зарядов энергия магнитного поля системы исчезающе мала по сравнению с электрической. Соответственно подавляющее значение в системе имеют электрические силы и электрические взаимодействия. Магнитные взаимодействия для системы медленно движущихся зарядов можно отнести к релятивистским эффектам; они растут с ростом скорости. Если v и v' близки к c, то множитель vv' в подынтегральном выражении как раз компенсирует малость f.

Сказанное о релятивистском характере магнитных сил, однако, не означает, что магнитные силы всегда малы при малых скоростях движения зарядов: в стационарном случае для электронейтральных систем электрическое поле может быть исчезающе малым, а магнитное — значительным, так как электронейтральность не означает отсутствие тока. Ток может быть образован движением большого количества зарядов одного знака. В металлах, например, электронейтральность системы сохраняется в физически малых элементах объема, хотя ток обусловлен движением одних электронов: при стационарном процессе положительный заряд ионов внутри проводника равен отрицательному заряду электронов.

Для электромагнитных волн – предельно релятивистского объекта, имеющего скорость передачи энергии в вакууме, равную c, как это будет показано ниже, вклады в энергию электрической и магнитной составляющих одинаковы.

В заключение раздела о стационарном электромагнитном поле рассмотрим вопрос о потоке энергии. Если имеет место одно электрическое или одно магнитное поле, то нет ни потока энергии, ни распределенного в пространстве импульса. (Из формул (3.7) и (3.17) следует, что эти величины равны нулю.) Но если в некоторой области пространства существуют одновременно стационарное магнитное и стационарное электрическое поля, причем векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ неколлинеарны друг другу, то имеется перенос энергии с плотностью потока

$$\vec{\sigma}=\frac{1}{\mu_0}\,[\vec{E}\vec{B}].$$

Кроме того, такое поле обладает и импульсом, распределенным с плотностью

$$\vec{g}=\varepsilon_0\,[\vec{E}\vec{B}].$$

Стационарный поток энергии не приводит к изменению векторов напряженности и индукции в различных точках пространства; сохраняется в каждой точке плотность энергии и плотность импульса. Кроме того, если ввести величину $\tilde{w}=\dfrac{\sigma}{c}$ (плотность энергии в потоке, движущемся со скоростью c), то выполняется релятивистское соотношение $\tilde{w}=cg$.

Чтобы понять наличие потока энергии и импульса у стационарного поля, обратимся к аналогии. В стационарном потоке несжимаемой жидкости распределен импульс с плотностью $\mu\vec{v}$ (μ – плотность массы; $\vec{v}$ – скорость потока) и имеется движение энергии. Ниже мы увидим, что передача энергии по проводам в случае постоянного тока осуществляется именно за счет потока энергии в стационарном электромагнитном поле, существующем в непосредственной близости от провода.

Методические указания и рекомендации

I. Бóльшая часть материала главы с формальной точки зрения является частным случаем изученного ранее. Здесь изложены не электростатика и магнитостатика – самостоятельные разделы о постоянных полях в веществе, а лишь некоторые вопросы стационарных полей в вакууме. Принципиальное значение имеют дипольное приближение, анализ соотношения точек зрения близкодействия и дальнодействия в вопросе об энергии поля; соответствующий материал относится к лекциям. Ряд других вопросов может быт изучен студентами самостоятельно при надлежащей организации работы.