

пакет, если он образован двумя соответствующими совокупностями гармоник (9.22).

Пример 9.3. Выражения для векторов плоской монохроматической волны, распространяющейся по оси Ox (или против) и поляризованной в плоскости Oxz .

$$E_x = E_y = 0, \quad B_x = B_z = 0,$$

$$E_z = E_0 \cos(kx \mp \omega t), \quad B_y = \frac{E_0}{c} \cos(kx \mp \omega t).$$

Пример 9.4. Выражения для векторов поля электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси Oy и поляризованной по кругу.

Пусть при $t = 0$ в точке $y = 0$ вектор \vec{E} направлен по Oz . Тогда

$$E_{1z} = E_0 \cos(ky - \omega t), \quad B_{1x} = \frac{E_0}{c} \cos(ky - \omega t),$$

$$E_{2x} = E_0 \cos\left(ky - \omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad B_{2z} = -\frac{E_0}{c} \cos\left(ky - \omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

(С вращением по часовой стрелке, если смотреть с положительного «конца» оси Oy .)

Пример 9.5. Сложение двух монохроматических волн одинаковой частоты, фазы и направления распространения с круговой поляризацией в противоположных направлениях.

Для волн, движущихся вдоль оси Oy , имеем

$$E_z^{(1)} = a \cos(ky - \omega t), \quad E_x^{(1)} = a \cos\left(ky - \omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$E_z^{(2)} = b \cos(ky - \omega t), \quad E_x^{(2)} = b \cos\left(ky - \omega t - \frac{3\pi}{2}\right),$$

где a и b — амплитуды составляющих.

Результирующее поле найдется сложением соответствующих проекций:

$$E_z = (a + b) \cos(ky - \omega t),$$

$$E_x = (a - b) \cos\left(ky - \omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Если $a = b$, то получается плоскополяризованная волна; при $a > b$ — правая круговая; при $a < b$ — левая круговая поляризация.

§ 10. Излучение электромагнитных волн

10.1. Потенциалы электромагнитного поля вдали от системы зарядов. В общем случае произвольного движения зарядов в системе потенциалы поля φ и \vec{A} описываются выражениями (5.29). Практическое вычисление потенциалов непосредственно по указанным формулам осложняется необходимостью учета запаздывания: величины ρ и \vec{j} должны браться для каждой точки \vec{r}_0 в различные моменты времени $t - \frac{r'}{c}$. Поэтому оказывается возможным рассчитать поле лишь приближенно и при некоторых ограничениях, касающихся системы зарядов.

Важное значение имеют электронейтральные системы зарядов,

занимающие ограниченную область пространства. Рассмотрим поле такой системы на больших расстояниях от нее. Система может быть охарактеризована в целом электрическим и магнитным дипольными моментами \vec{p} и \vec{m} так, как это было уже сделано в § 6 и § 8. Но теперь в силу нестационарности движения зарядов дипольные моменты не постоянны, они являются функциями времени. Произведем расчет потенциалов поля с учетом этой зависимости.

При $r_0 \ll r$ (см. рис. 6.4) используем приближенные выражения для входящих в потенциалы величин $\frac{1}{r'}$ и r' , ограничиваясь членами первого порядка малости:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \approx \frac{1}{r} + \left(\text{grad} \frac{1}{r} \right) (-\vec{r}_0) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \vec{r}_0}{r^3}; \quad (10.1)$$

$$r' = |\vec{r} - \vec{r}_0| \approx r + (\text{grad } r) (-\vec{r}_0) = r - \frac{\vec{r} \vec{r}_0}{r}. \quad (10.2)$$

В формулы для потенциалов входит величина $t - \frac{r'}{c}$. В первом приближении согласно (10.1)

$$t - \frac{r'}{c} \approx t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \vec{r}_0}{rc} = \tau + \frac{\vec{r} \vec{r}_0}{rc},$$

где $\tau = t - \frac{r}{c}$ — время с учетом запаздывания на «общем» расстоянии r от системы до точки наблюдения, а слагаемое $\frac{\vec{r} \vec{r}_0}{rc}$ имеет смысл собственного времени запаздывания по отношению к точке O , принятой за «центр» системы. Вводя единичный вектор направления на точку наблюдения $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, имеем

$$t - \frac{r'}{c} \approx \tau + \frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c}. \quad (10.3)$$

Предполагается, что собственное время запаздывания для всех точек системы много меньше τ . Это позволяет разложить функции $q\left(\vec{r}_0, \tau + \frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c}\right)$ и $\vec{j}\left(\vec{r}_0, \tau + \frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c}\right)$ в ряд по степеням малой величины $\frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c}$ и ограничиться двумя первыми членами разложения:

$$q\left(\tau + \frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c}\right) \approx q(\tau) + \frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c} \dot{q}(\tau), \quad \vec{j}\left(\tau + \frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c}\right) \approx \vec{j}(\tau) + \frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c} \dot{\vec{j}}(\tau).$$

Здесь точки обозначают частные производные функции по τ или t . Выполняя подстановку полученных выражений в формулы для потенциалов поля (5.29) и используя (10.1), получаем с точностью до членов первого порядка малости

$$\varphi = k \int_{V_0} \frac{q(\vec{r}_0, \tau)}{r} dV_0 + k \int_{V_0} \frac{q(\vec{r}_0, \tau) \vec{r}_0 \vec{n}}{r^2} dV_0 + k \int_{V_0} \frac{\dot{q}(\vec{r}_0, \tau) \vec{r}_0 \vec{n}}{cr} dV_0 + \dots \quad (10.4)$$

$$\vec{A} = f \int_{V_0} \frac{\vec{j}(\vec{r}_0, \tau)}{r} dV_0 + f \int_{V_0} \frac{\vec{j}(\vec{r}_0, \tau) \vec{r}_0 \vec{n}}{r^2} dV_0 + f \int_{V_0} \frac{\dot{\vec{j}}(\vec{r}_0, \tau) \vec{r}_0 \vec{n}}{cr} dV_0 + \dots \quad (10.5)$$

Эти приближенные выражения для потенциалов поля применимы, как уже говорилось, при условии малости собственного времени запаздывания по сравнению с общим запаздыванием. Кроме этого, необходимо, чтобы за время собственного запаздывания не слишком сильно изменялись плотности зарядов и токов q и \vec{j} : в противном случае нельзя будет пользоваться разложениями ввиду больших значений \dot{q} и $\dot{\vec{j}}$. Заряды в системе за время собственного запаздывания проходят расстояние порядка $v \frac{r_0}{c}$. Если это расстояние мало по сравнению с размерами системы r_0 , то за время собственного запаздывания расположение зарядов существенно не изменяется и принятое приближение допустимо. Условием его применимости служит сильное неравенство

$$\frac{v}{c} r_0 \ll r_0,$$

из которого следует

$$v \ll c,$$

т. е. скорости движения зарядов в системе должны быть нерелятивистскими.

Приступаем к анализу формулы (10.4). Первое слагаемое

$$\varphi_1 = k \frac{Q}{r}$$

имеет смысл потенциала точечного заряда Q , равного заряду системы. Для электронейтральной системы оно равно нулю. Второе слагаемое дает потенциал, имеющий волновой характер и определяющийся дипольным электрическим моментом системы, взятым в момент времени τ . Используя определение дипольного момента (6.15), получаем

$$\varphi_2 = \frac{k \vec{n}}{r^2} \int_{V_0} \vec{r}_0 Q(\vec{r}_0, \tau) dV_0 = \frac{k}{r^2} \vec{n} \vec{p}(\tau).$$

Поле φ_2 быстро убывает с ростом r , оказываясь на больших расстояниях от системы зарядов меньше третьего, основного в так называемой волновой зоне ($r \gg r_0$), слагаемого:

$$\varphi_3 = \frac{k \vec{n}}{rc} \int_{V_0} \dot{Q}(\vec{r}_0, \tau) dV_0 = k \frac{\vec{n}}{cr} \frac{d}{dt} \int_{V_0} \vec{r}_0 Q(\vec{r}_0, \tau) dV_0 = \frac{k}{cr} \vec{n} \dot{\vec{p}}(\tau). \quad (10.6)$$

Далее исследуем выражение (10.5) для векторного потенциала. Уже первое слагаемое не равно нулю и оказывается существенно важным в вопросе об излучении. (Здесь имеется отличие от выводов § 8, п. 8.3, где рассматривался стационарный случай и токи в системе были замкнутыми. Сейчас же движение зарядов произвольное.) Согласно формуле (10.5) в первом приближении

$$\vec{A} \simeq \vec{A}_1 = f \frac{1}{r} \int_V \vec{j}(\vec{r}_0, \tau) dV_0.$$

Покажем, что векторный потенциал \vec{A}_1 и скалярный потенциал φ_3 связаны друг с другом простым соотношением. Для этого преобразуем выражение (10.6), используя уравнение непрерывности (1.6):

$$\varphi_3 = k \frac{\vec{n}}{cr} \int_V \vec{r}_0 \dot{Q}(\vec{r}_0, \tau) dV_0 = -k \frac{\vec{n}}{cr} \int_V \vec{r}_0 \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}_0, \tau) dV_0.$$

Рассчитаем проекцию интеграла

$$\int_V \vec{r}_0 \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}_0, \tau) dV_0$$

на ось Ox . Для вычислений применим тождество (см. П. II, 15) и получим

$$\int_V x_0 \operatorname{div} \vec{j} dV_0 = \int_V \operatorname{div} (x_0 \vec{j}) dV_0 - \int_V j_x dV_0.$$

Преобразуем интеграл с дивергенцией в правой части равенства по теореме Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} (x_0 \vec{j}) dV_0 = \oint_S x_0 \vec{j} \vec{dS}.$$

Интегрирование производится по поверхности S , ограничивающей объем V_0 . Так как заряды за пределы системы не выходят, интеграл обращается в нуль. Тогда

$$\int_V x_0 \operatorname{div} \vec{j} dV_0 = - \int_V j_x dV_0,$$

и поэтому

$$\int_V \vec{r}_0 \operatorname{div} \vec{j} dV_0 = - \int_V \vec{j} dV_0.$$

Следовательно,

$$\varphi_3 = k \frac{\vec{n}}{cr} \int_V \vec{j}(\vec{r}_0, \tau) dV_0 = \frac{k}{fc} \vec{A}_1 \vec{n}. \quad (10.7)$$

Вспоминая, что $k = c^2 f$, и учитывая формулу (10.6), имеем

$$\varphi_3 = c \vec{A}_1 \vec{n}, \quad \vec{A}_1 = \frac{f}{r} \dot{\vec{p}} = \frac{k}{c^2 r} \dot{\vec{p}}. \quad (10.8)$$

Обе величины $-\varphi_3$ и A_1 — задаются скоростью изменения электри-

ческого дипольного момента системы во времени, т. е. величиной $\dot{\vec{p}}$. Учитывая характер зависимости дипольного момента от времени $\left(\vec{p} = \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$, заключаем, что поле (10.8) представляет собой волну, распространяющуюся по радиальным направлениям от системы зарядов. Следовательно, мы имеем дело с электромагнитными волнами, излучаемыми движущимися зарядами. Поле, определяемое потенциалами φ_3 и \vec{A}_1 , называется *электрическим дипольным излучением*.

По модулю скалярный потенциал φ_3 в c раз больше векторного \vec{A}_1 . Как мы увидим в следующем пункте, это приводит к соотношению между векторами поля $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$. Но именно такая связь характерна для электромагнитных волн (см. формулу (9.15)). Поэтому оба потенциала φ_3 и \vec{A}_1 вносят равноценный вклад в излучение и являются однопорядковыми в разложениях.

Дипольное электрическое излучение системы может отсутствовать (см. § 10, п. 10.2). В таких случаях нужно использовать следующие члены в разложениях (10.4) и (10.5). Скалярный потенциал определяется четвертым слагаемым, не выписанным в формуле (10.4). Он ответствен за электрическое квадрупольное излучение, которое здесь изучаться не будет. Обратимся к слагаемым \vec{A}_2 и \vec{A}_3 в формуле (10.5). Выражения

$$\vec{A}_2 = \frac{f}{r^2} \int_{V_0} (\vec{r}_0 \vec{n}) \vec{j}(\vec{r}_0, \tau) dV_0 \quad \text{и} \quad \vec{A}_3 = \frac{f}{cr} \int_{V_0} (\vec{r}_0 \vec{n}) \dot{\vec{j}}(\vec{r}_0, \tau) dV_0$$

по структуре аналогичны рассматривавшемуся ранее выражению (8.9). После ряда преобразований соотношение (8.9) принимает вид (8.12). Используя те же приемы вычислений, можно получить новые формулы для потенциалов \vec{A}_2 и \vec{A}_3 , сходные по форме с выражением (8.12). Поэтому их можно записать сразу, минуя выкладки, по аналогии с формулой (8.12):

$$\vec{A}_2 = \frac{f}{r^2} [\vec{m}(\tau) \vec{n}]; \quad (10.9)$$

$$\vec{A}_3 = \frac{f}{cr} [\dot{\vec{m}}(\tau) \vec{n}]. \quad (10.10)$$

На больших расстояниях от системы, в волновой зоне $A_2 \ll A_3$. Поэтому следует принимать в расчет только потенциал \vec{A}_3 . Он определяет так называемое *магнитное дипольное излучение*.

10.2. Электрическое дипольное излучение. Пользуясь потенциалами поля φ_3 и \vec{A}_1 , найдем векторы поля \vec{E} и \vec{B} электрического дипольного излучения. Сначала вычислим магнитную индукцию:

$$\vec{B} = \text{rot} \frac{k\vec{p}(\tau)}{c^2 r} = \frac{f}{r} \text{rot} \vec{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) + f \left[\text{grad} \frac{1}{r} \vec{p} \right]$$

Последнее слагаемое дает величину, убывающую пропорционально квадрату расстояния, а первое — пропорционально первой степени. Поэтому, не уменьшая точности расчета, вторым слагаемым можно пренебречь и принять

$$\vec{B} = \frac{f}{r} \quad \dot{\vec{p}} = \frac{f}{r} \left[\text{grad} \left(t - \frac{r}{c} \right) \ddot{p}(\tau) \right] = \frac{f}{cr} [\ddot{p}(\tau) \vec{n}]. \quad (10.11)$$

Напряженность электрического поля \vec{E} найдем по формуле (4.2). Предварительно заметим, что $\text{grad} \varphi \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\dot{\varphi}(\tau) \frac{\vec{n}}{c}$. Тогда $\vec{E} = \frac{\ddot{\varphi}(\tau)}{c} - \dot{\vec{A}}(\tau)$.

Используя соотношение (10.8), получаем

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{n} (\vec{n} \vec{A}) - \dot{\vec{A}} = [\dot{\vec{A}} \vec{n}] \vec{n}, \\ \text{или } \vec{E} &= \frac{f}{r} [\ddot{p} \vec{n}] \vec{n} = c [\vec{B} \vec{n}]. \end{aligned} \quad (10.12)$$

В формулах (10.11) и (10.12) функции $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{B}(\vec{r}, t)$ зависят от характерного для сферических волн аргумента $t - \frac{r}{c}$. Волна распро-

страняется по радиусам от начала координат. (Именно в этой точке находится излучающая система зарядов.) Направление движения фронта волны в любой точке задается вектором \vec{n} . По мере удаления от систем напряженность и индукция поля уменьшаются пропорционально $\frac{1}{r}$. Однако сходство со сферической волной здесь не пол-

ное; далее мы увидим, что волновое поле (10.11), (10.12) не обладает сферической симметрией, интенсивность поля по различным направлениям неодинакова.

Как и для плоской волны, векторы \vec{E} , \vec{B} , \vec{n} образуют правую тройку. Связь между модулями $E = cB$ та же, что и для плоской волны. (Это и свидетельствует о правильности отнесения потенциалов φ_3 и \vec{A}_1 к одному и тому же приближению.) Остается заметить, что излучение имеет место только при условии $\ddot{p} \neq 0$. Очевидно также, что волновое поле будет периодическим, если величина \ddot{p} — периодическая функция времени. Например, при гармонической зависимости дипольного момента \vec{p} от времени излучается соответствующая по частоте монохроматическая волна.

Рассмотрим также пространственное распределение поля (10.12) относительно заданного направления \vec{p} . Пусть ось Oz направлена по вектору \vec{p} . Тогда

$$\vec{E} = \frac{f}{r} \left\{ \vec{n} (\vec{n} \ddot{p}) - \ddot{p} \right\} = \left\{ \vec{n} |\ddot{p}| \cos \vartheta - \ddot{p} \right\} \frac{f}{r}.$$

Таким образом, вектор \vec{E} лежит в меридиональной плоскости, проходящей через векторы $\ddot{\vec{p}}$ и \vec{n} (рис. 10.1). Если воспользоваться тройкой единичных векторов \vec{e}_r , \vec{e}_ϑ и \vec{e}_α (рис. 10.2), то получим удобные выражения

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{f}{r} |\ddot{\vec{p}}| \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta, \\ \vec{B} &= \frac{f}{cr} |\ddot{\vec{p}}| \sin \vartheta \vec{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (10.13)$$

Формулы (10.13) показывают, что максимум излучения лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\ddot{\vec{p}}$ (плоскость Oxy). Поле обладает осевой симметрией.

В соответствии с формулой (3.7) плотность потока энергии

$$\vec{\sigma} = \frac{f^2}{c\mu_0} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{r^2} \sin^2 \vartheta \vec{n} = \frac{f}{4\pi c} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{r^2} \sin^2 \vartheta \vec{n}.\quad (10.14)$$

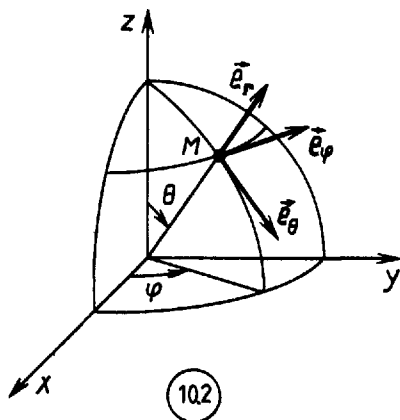
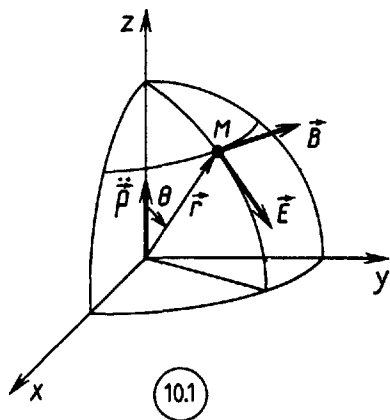
Часто нужно знать полный поток энергии по всем направлениям за единицу времени или мощность, излучаемую системой:

$$N = \oint \vec{\sigma} \overline{d\vec{S}}.$$

Расчет удобнее сделать в сферических координатах. Получаем

$$N = \frac{f |\ddot{\vec{p}}|^2}{4\pi c} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \frac{\sin^2 \vartheta r^2}{r^2} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2f}{3c} |\ddot{\vec{p}}|^2.\quad (10.15)$$

Систему, излучающую электромагнитные волны, характеризуют также величиной, называемой *интенсивностью излучения*. По опре-



делению интенсивность — поток энергии, проходящий в некотором телесном угле $d\Omega$ или проходящий через некоторую площадку $dS = r^2 d\Omega$. Так что для элементарной площадки

$$dN = \vec{\sigma} \overline{dS}. \quad (10.16)$$

Очевидно, излучаемая системой мощность (10.15) есть не что иное, как полная интенсивность излучения.

Пример 10.1. Излучение ускоренно движущегося точечного заряда.

Воспользуемся выражением дипольного момента системы зарядов (6.16)

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{0i} q_i$$

и найдем вторую производную от \vec{p} по времени, определяющую согласно изложенному выше все параметры излучения:

$$\ddot{\vec{p}} = \sum_{i=1}^n \ddot{\vec{r}}_{0i} q_i = \sum_{i=1}^n \ddot{\vec{a}}_{0i} q_i,$$

где $\ddot{\vec{a}}_{0i}$ — ускорение i -го заряда (рис. 10.3). В соответствии с принципом суперпозиции полей электромагнитная волна, излученная системой зарядов, есть суперпозиция волн, излученных каждым ускоренно движущимся зарядом q_i . Применимость этого положения в теории излучения обеспечивается линейностью связи векторов поля \vec{E} и \vec{B} с параметром $\ddot{\vec{p}}$. Благодаря указанному свойству формул (10.11) и (10.12) слагаемые $\ddot{\vec{a}}_{0i} q_i$ могут рассматриваться как отдельные источники волн. Поле излучения i -го заряда характеризуется величинами

$$\vec{E}_i = \frac{f q_i}{r} [\ddot{\vec{a}}_i \vec{n}], \quad \vec{B}_i = \frac{f q_i}{cr} [\ddot{\vec{a}}_i \vec{n}].$$

Все выводы о (мгновенном) пространственном распределении поля, о потоке энергии, сделанные в § 10, п. 10.2 для диполя, остаются в силе для отдельного ускоренно движущегося точечного заряда (при замене в формулах $\ddot{\vec{p}}$ на $q\ddot{\vec{a}}$). Важно подчеркнуть, что излучают электромагнитные волны только ускоренно движущиеся заряды, ибо в противном случае $\ddot{\vec{p}} = 0$. И наконец, следует сказать, что, сводя излучение движущегося заряда к излучению неподвижного диполя, мы неизбежно ограничиваемся нерелятивистскими скоростями движения заряда (см. общий анализ вопроса в § 10, п. 10.1).

Пример 10.2. Излучение гармонического осциллятора.

Изменяющийся со временем дипольный момент

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \sin \omega t$$

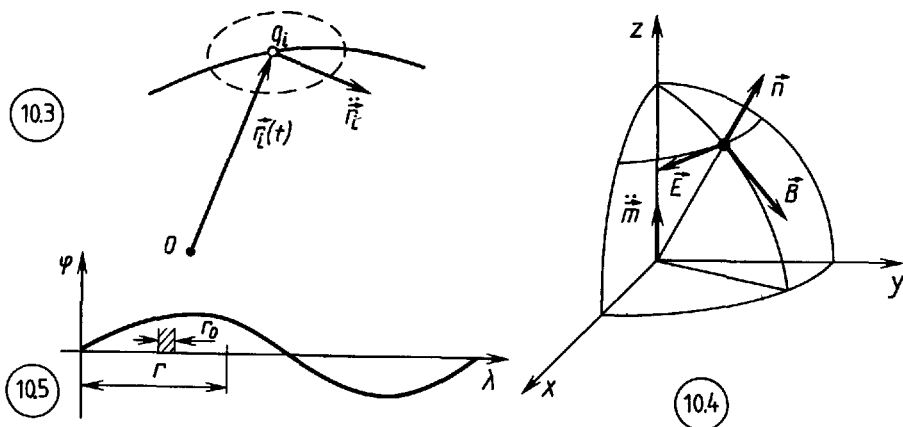
создает дипольное электрическое излучение, определяемое векторами

$$\vec{E} = \frac{f}{r} p_0 \omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\theta,$$

$$\vec{B} = \frac{f}{rc} p_0 \omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\varphi.$$

Мощность излучения равна:

$$N = \frac{2fp_0^2 \omega^4}{3c} \sin^2(\omega t - kr), \quad k = \frac{\omega}{c}.$$



Мощность быстро растет с частотой колебаний ($\sim \omega^4$). Однако применимость формул ограничена условием: $v \ll c$, где v — скорость движения зарядов. Отсюда следует

$$\frac{r_0 \omega}{c} \ll 1,$$

где r_0 — параметр, определяющий размеры системы. Для атомов $r_0 \sim 10^{-10}$ м; следовательно, $\omega \ll 10^{18} \frac{1}{\text{с}}$. Частота света $\omega \sim 10^{15} \frac{1}{\text{с}}$, т. е. данный критерий выполняется.

Предлагаем читателям подумать над возможными путями практической реализации излучающего гармонического осциллятора.

Пример 10.3. Расчет излучения атома и несостоятельность классической планетарной модели атома.

Представим атом как систему, состоящую из ядра и электрона, обращающегося вокруг ядра по законам классической механики. Ускорение электрона найдем из условия:

$$ma = \frac{mv^2}{r} = k \frac{Ze^2}{r^2},$$

откуда

$$a = \frac{kZe^2}{mr^2}.$$

Вектор дипольного момента системы определится формулой

$$\vec{p} = e\vec{r}.$$

Он вращается в плоскости орбиты. Его вторая производная, необходимая для расчета параметров излучения, определяется через ускорение:

$$|\ddot{\vec{p}}| = e|\ddot{\vec{r}}| = \frac{kZe^3}{mr^2}.$$

Мощность излучения находим с помощью выражения (10.15). Она равна:

$$N = \frac{2fk^2Z^2e^6}{3cm^2r^4}.$$

Используя для оценки данные, указанные в примере 10.2, получим значение порядка $0,6 \cdot 10^{-7}$ Дж/с. При излучении должна уменьшаться механическая энергия движения электрона, т. е. сумма его кинетической и потенциальной энергий. (При приближении электрона вплотную к ядру выделится энергия $\sim \frac{kZe^2}{r_a} \approx 2 \cdot 10^{-13}$ Дж. Кинетическая

энергия имеет порядок величины $2 \cdot 10^{-18}$ Дж.) В результате потери энергии на излучение электрон не может стационарно двигаться по орбите и упадет на ядро. Отсюда следует вывод о несостоятельности использованной планетарной модели атома.

10.3. Магнитное дипольное излучение. Сопоставляя выражения электрического дипольного и магнитного дипольного потенциалов, можно показать, что отношение их модулей по порядку величины в общем случае равно $\frac{c}{v}$. (Это видно из того, что в плотность тока входит скорость движения заряда.) При условии $v \ll c$ электрическое дипольное излучение по интенсивности на много порядков больше магнитного дипольного излучения. Однако при $\ddot{\vec{p}} = 0$ на первый план выходит магнитное дипольное излучение, определяющееся векторным потенциалом (10.10).

Найдем векторы поля \vec{E} и \vec{B} в этом случае:

$$\vec{E} = -\frac{f}{cr} [\ddot{\vec{m}}(\tau) \vec{n}], \quad (10.17)$$

$$\vec{B} = \frac{f}{cr} \left[\text{grad} \left(t - \frac{r}{c} \right) [\dot{\vec{m}}(\tau) \vec{n}] \right] + \frac{f}{c} \left[\text{grad} \frac{1}{r} [\dot{\vec{m}} \vec{n}] \right]$$

Второе слагаемое в формуле для индукции следует в рассматриваемом приближении отбросить, так как оно содержит множитель $\frac{1}{r^2}$, поэтому

$$\vec{B} = -\frac{f}{c^2 r} \left[\vec{n} [\ddot{\vec{m}}(\tau) \vec{n}] \right] = \frac{1}{c} [\vec{n} \vec{E}]. \quad (10.18)$$

Взаимное расположение векторов \vec{E} , \vec{B} и \vec{n} показано на рисунке 10.4.

Таким образом, мы вновь имеем дело со сферической волной, аналогичной рассмотренной в § 10, п. 10.2. Несмотря на дополнительный множитель c в знаменателе, магнитное дипольное излучение может быть весьма значительным при больших значениях $\ddot{\vec{m}}$, что может иметь место в системе с большими и быстроизменяющимися токами.

Рамки пособия не позволили включить описание электрического квадрупольного излучения системы. Оно принимается в расчет, когда дипольное излучение отсутствует. Что касается отношения интенсивностей магнитного дипольного и электрического квадрупольного излучений, то в общем виде его оценить нельзя.

Мы рассмотрели магнитное дипольное излучение, опустив элек-

трическое квадрупольное потому, что первое очень важно в практике: широко применяются рамочные излучатели-антенны с переменным током.

Пример 10.4. Расчет излучения рамки с током.

Круглая рамка с током расположена в плоскости Oxy , центр ее совпадает с началом координат. Сила тока в рамке изменяется по закону $I = I_0 \sin \omega t$. Определим магнитное дипольное излучение рамки.

Магнитный дипольный момент рамки равен: $\vec{m} = \vec{k} \pi a^2 I_0 \sin \omega t$, где a — радиус рамки, а \vec{k} — единичный вектор оси Oz . Для векторов поля с помощью формул (10.17) — (10.18) имеем (см. рис. 10.4)

$$\vec{E} = -\frac{f}{cr} |\ddot{\vec{m}}| \sin \vartheta \vec{e}_a,$$

$$\vec{B} = \frac{f}{c^2 r} |\ddot{\vec{m}}| \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta$$

Здесь

$$\ddot{\vec{m}} = \pi a^2 I_0 \omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{k}$$

Вектор Умова-Пойнтинга равен:

$$\vec{\sigma} = \frac{f}{4\pi c^3 r^2} |\ddot{\vec{m}}|^2 \sin^2 \vartheta \vec{n}.$$

Полная мощность излучения получается интегрированием по сфере с $r \gg a$

$$N = \frac{2\pi^2 f}{3c^3} a^4 I_0^2 \omega^4 \sin^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

Излучение сосредоточено преимущественно в плоскости рамки.

10.4*. Понятие о волновой и квазистатической зонах. Допустим, что дипольный момент системы \vec{p} есть периодическая функция времени. В этом случае появляется характерный параметр, определяющий свойства излучающей системы зарядов. Им будет период T или соответствующая длина волны $\lambda = cT$. В § 10, п. 10.1 были найдены приближенные выражения для потенциалов φ и \vec{A} . Правомерность их использования определялась только большими по сравнению с размерами системы расстояниями ($r \gg r_0$). Теперь характер и степень точности принятого приближения можно уточнить, сравнивая r и r_0 с λ . Напомним определение: длина волны есть наименьшее расстояние между точками, колеблющимися в одинаковой фазе. За один период волна (возмущение, изменение состояния поля, фаза волны, волновой фронт и т. д.) сдвинется в пространстве на отрезок, равный λ .

Пусть размеры системы значительно меньше длины волны излучаемых электромагнитных волн, т. е.

$$r_0 \ll \lambda. \quad (10.19)$$

В таком случае возможно разделение пространства на ближнюю к системе зарядов зону ($r \ll \lambda$) и дальнюю зону ($r > \lambda$), причем разло-

жения (10.4) и (10.5) потенциалов применимы и в ближней зоне.

Дальняя зона уже исследована ранее достаточно полно. Рассмотрим поле в ближней зоне. Для электронейтральной системы сейчас нет оснований пренебрегать вторым слагаемым в формуле (10.4):

$$\varphi_2 = \frac{k}{r^2} \vec{p} \vec{n}.$$

Если

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t,$$

то

$$\varphi_2 = \frac{kp_0}{r^2} \cos \vartheta \cos \omega t.$$

Сравним φ_2 с потенциалом φ_3 . У нас

$$\varphi_3 = \frac{ct}{r} \dot{\vec{p}} \vec{n} = -\frac{k2\pi p_0 \cos \vartheta}{\lambda r} \sin \omega t.$$

В ближней зоне

$$\left| \frac{\varphi_2}{\varphi_3} \right| \sim \frac{\lambda}{r} > 1.$$

(Все остальные члены разложений для скалярного и векторного потенциалов в c раз меньше φ_3 , см. § 10, п. 10.1.)

Становится очевидным, что поле в ближней зоне определяется членом φ_2 , совпадающим по виду с потенциалом электростатического поля в дипольном приближении. Что касается его «волновой» зависимости от времени $\tau = t - \frac{r}{c}$, то она здесь малосущественна: для

области $r \ll \lambda$ запаздывания пренебрежимо малы, и колебания потенциала в этих точках могут быть приняты за синхронные с колебаниями дипольного момента (рис. 10.5). Это верно и в отношении векторного потенциала \vec{A}_2 . Таким образом, поле в ближней зоне является квазистатическим (почему данная зона и называется квазистатической).

Возможность выделения ближней и дальней зон, законность используемых приближений зависят от конкретных условий задачи. Не для всех систем возможно одновременное выполнение трех неравенств: при $r > \lambda$ и $\lambda \gg r_0$, $r \gg r_0$. В качестве примера предлагаем читателю установить границы зон для антенны телецентра ($\lambda \approx 1$ м, $r_0 \approx 1$ м) и провода длиной 1 м с переменным током технической частоты 50 Гц.

10.5*. Спектральное разложение излучения. Как было показано выше, система произвольно движущихся зарядов излучает электромагнитные волны. В § 9, п. 9.3 было установлено, что электромагнитное поле в свободном состоянии всегда может быть разложено на гармоники (см. формулу (9.16)). Для того чтобы проследить связь

электромагнитных волн (по происхождению) с системой излучивших их зарядов, необходимо показать, как излучение системы распадается на гармонические составляющие. Сделаем это для волновой зоны в дипольном приближении.

В общем случае плотности заряда и тока как функции времени могут быть представлены разложениями в интеграл Фурье:

$$\varrho(\vec{r}_0, t) = \int \varrho_0(\omega, \vec{r}_0) e^{i\omega t} d\omega; \quad (10.20)$$

$$\vec{j}(\vec{r}_0, t) = \int \vec{j}_0(\vec{r}_0, \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (10.21)$$

При расчете потенциалов поля по формулам (5.29) или непосредственно по формулам дипольного приближения (10.7), (10.8) в силу линейности производимых операций разложение повторится для промежуточных и окончательных результатов. Так, дипольные моменты примут вид

$$\vec{p}(\tau) = \int \vec{p}_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \quad (10.22)$$

$$\vec{m}(\tau) = \int \vec{m}_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (10.23)$$

причем

$$\vec{p}_0(\omega) = \int \vec{r}_0 \varrho_0(\omega, \vec{r}_0) dV_0, \quad \vec{m}_0(\omega) = \frac{1}{2} \int [\vec{r}_0, \vec{j}_0(\vec{r}_0, \omega)] dV_0.$$

С помощью выражений (10.22) и (10.23) найдем формулы для векторов излучаемого поля:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{f}{cr} \int \omega^2 [\vec{p}_0(\omega) \vec{n}] e^{i\omega\tau} d\omega; \quad (10.24)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{f}{r} \int \omega^2 [[\vec{p}_0(\omega) \vec{n}] \vec{n}] e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (10.25)$$

Если еще учесть, что

$$\omega\tau = \omega t - \frac{\omega r}{c} = \omega t - kr,$$

то формулы (10.24) и (10.25) предстают перед нами как спектральные разложения сферических волн на гармонические составляющие всевозможных частот, обусловленных соответствующими гармониками колебаний зарядов.

Коэффициенты разложения в данном случае равны:

$$\vec{B}_0 = -\frac{f\omega^2}{cr} [\vec{p}_0 \vec{n}], \quad \vec{E}_0 = -\frac{f\omega^2}{r} [[\vec{p}_0 \vec{n}] \vec{n}]. \quad (10.26)$$

Они зависят от частоты гармоника, направления и величины вектора $\vec{p}_0(\omega)$, а также от направления излучения.

Спектральный состав излучения определяется набором частот излучателей ($\vec{p}_0(\omega)$, $\vec{m}_0(\omega)$). Характерно, что при прочих равных усло-

виях амплитуды векторов поля пропорциональны квадратам частот, а потоки энергии — интенсивность излучения — даже четвертой степени частоты. Это означает, что «легче» излучают высокочастотные осцилляторы.

Из разложений также видно, что строго монохроматическая волна может быть испущена только строго гармоническим осциллятором. Всякие отклонения от гармоничности дают излучение, занимающее полосу частот той или иной ширины. В частности, как это было показано в примере 9.1, колебания, длящиеся конечное время, занимают некоторый частотный интервал.

Завершая теоретическое рассмотрение вопросов об электромагнитном поле в пространстве без зарядов и об излучении электромагнитных волн системами движущихся зарядов, необходимо подчеркнуть, что нами выяснена природа и происхождение радиоволн в широком диапазоне частот. Однако не все закономерности образования электромагнитных излучений могут быть поняты на основе изученного материала: короткие электромагнитные волны, в частности световые, излучаются микросистемами электрических зарядов (атом, молекула, кристалл), для которых макроскопическая электродинамика неприменима. И тем не менее многие формулы для излучения в дипольном приближении, выведенные выше в этом параграфе, остаются в силе как результат некоторого усреднения микрокартины излучения, носящего квантовый характер.

§ 11. Рассеяние электромагнитных волн свободным зарядом

11.1. Постановка вопроса о движении заряда в электромагнитном поле. Выше рассматривалось электромагнитное поле, создаваемое системой электрических зарядов. Поставим теперь вопрос о движении в этом поле точечного заряда. Поле может считаться внешним при условии, если движение рассматриваемого заряда q не изменяет векторы поля \vec{E} и \vec{B} . Обсудим это условие детальнее. Пусть система Q создает поле (\vec{E}, \vec{B}) , в которое помещен заряд q . Разумеется, заряд также создает собственное поле (\vec{E}', \vec{B}') , накладывающееся на поле (\vec{E}, \vec{B}) . Но практически осуществим случай, когда внешнее поле определяет движение заряда q , а собственное поле не меняет конфигурацию и движение зарядов Q , тем самым не оказывая влияние и на созданное ими поле (\vec{E}, \vec{B}) . Иными словами, поле (\vec{E}, \vec{B}) никак не связано с движением заряда q и рассматривается по отношению к нему в качестве внешнего заданного поля. Так возникает задача о заряде, внесенном в электромагнитное поле. Кроме того, заметим, что самодействием, т. е. действием поля (\vec{E}', \vec{B}') , на движение создавшего его заряда q часто можно пренебречь.

Общая задача о заряде во внешнем поле подразделяется на несколько частных. Во-первых, возможен случай движения без излуче-