виях амплитуды векторов поля пропорциональны квадратам частот, а потоки энергии — интенсивность излучения — даже четвертой степени частоты. Это означает, что «легче» излучают высокочастотные осцилляторы.

Из разложений также видно, что строго монохроматическая волна может быть испущена только строго гармоническим осциллятором. Всякие отклонения от гармоничности дают излучение, занимающее полосу частот той или иной ширины. В частности, как это было показано в примере 9.1, колебания, длящиеся конечное время, занимают некоторый частотный интервал.

Завершая теоретическое рассмотрение воросов об электромагнитном поле в пространстве без зарядов и об излучении электромагнитных волн системами движущихся зарядов, необходимо подчеркнуть, что нами выяснена природа и происхождение радиоволн в широком диапазоне частот. Однако не все закономерности образования электромагнитных излучений могут быть поняты на основе изученного материала: короткие электромагнитные волны, в частности световые, излучаются микросистемами электрических зарядов (атом, молекула, кристалл), для которых макроскопическая электродинамика неприменима. *И* тем не менее многие формулы для излучения в дипольном приближении, выведенные выше в этом параграфе, остаются в силе как результат некоторого усреднения микрокартины излучения, носящего квантовый характер.

§ 11. Рассеяние электромагнитных волн свободным зарядом

11.1. Постановка вопроса о движении заряда в электромагнитном поле. Выше рассматривалось электромагнитное поле, создаваемое системой электрических зарядов. Поставим теперь вопрос о движении в этом поле точечного заряда. Поле может считаться внешним при условии, если движение рассматриваемого заряда q не изменяет векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Обсудим это условие детальнее. Пусть система Q создает поле $(\vec{E}, \vec{B})$, в которое помещен заряд q. Разумеется, заряд также создает собственное поле $(\vec{E}', \vec{B}')$, накладывающееся на поле $(\vec{E}, \vec{B})$. Но практически осуществим случай, когда внешнее поле определяет движение заряда q, а собственное поле не меняет конфигурацию и движение зарядов Q, тем самым не оказывая влияние и на созданное ими поле $(\vec{E}, \vec{B})$. Иными словами, поле $(\vec{E}, \vec{B})$ никак не связано с движением заряда q и рассматривается по отношению к нему в качестве внешнего заданного поля. Так возникает задача о заряде, внесенном в электромагнитное поле. Кроме того, заметим, что самодействием, т. е. действием поля $(\vec{E}', \vec{B}')$, на движение создавшего его заряда q часто можно пренебречь.

Общая задача о заряде во внешнем поле подразделяется на несколько частных. Во-первых, возможен случай движения без излучения — это просто задача механики на движение под действием заданной силы Лоренца. (Такая задача решена в релятивистской динамике для движения точечного заряда в постоянном электрическом и магнитном полях. (См. [1], ч. II, примеры 6.6 и 6.7.) Но в случае ускоренного движения заряд излучает, т. е. не вся сообщаемая ему внешним полем энергия идет на повышение кинетической энергии заряда: часть ее теряется вместе с излучаемыми электромагнитными волнами. Поэтому, во-вторых, имеется задача о движении заряда при наличии излучения. Здесь возникает необходимость учесть самодействие, т. е. действие собственного поля на заряд. В-третьих, возможна задача об излучении заряда вследствие его движения, вызванного внешним полем, причем излученная волна сопоставляется с падающей. Это задача на рассеяние. Самодействие здесь может учитываться или не учитываться.

Все три типа задач, связанных с движением зарядов в поле, имеют практическое значение. Мы в соответствии с рамками курса разберем лишь излучение свободного заряда под действием внешнего поля. Предварительно уточним ранее изученные (см. [1]) уравнения движения заряженной материальной точки в электромагнитном поле, учитывая теперь и излучение.

Движение заряженной материальной точки в электромагнитном поле описывается классическим или релятивистским механическим уравнением движения для силы Лоренца (2.25). Однако после рассмотрения вопроса об излучении электромагнитных волн ускоренно движущимся зарядом становится очевидным, что в таком виде уравнение движения не всегда будет правильно описывать движение излучающего заряда: потеря энергии и импульса на излучение с механической точки зрения эквивалентна действию на заряженную материальную точку некоторой тормозящей силы, называемой силой *радиационного трения*. Определим величину силы радиационного трения для излучения, которое можно рассматривать в дипольном приближении. Так как полная мощность излучения определяется согласно формуле (10.15) второй производной по времени от дипольного момента, а для точечного заряда $\ddot{\vec{p}} = q\ddot{\vec{r}}$, то

$$N = \frac{2f}{3c} q^2 |\ddot{\vec{r}}|^2. \tag{11.1}$$

Поэтому сила, действующая на заряд и направленная навстречу скорости, удовлетворяет уравнению

$$\vec{F}_r \vec{v} = -\frac{2f}{3c} q^2 |\ddot{\vec{r}}|^2. \tag{11.2}$$

Выражая отсюда силу $\vec{F}_r$, учтем следующее важное обстоятельство: дипольное приближение справедливо для случая движения заряда в небольшой по сравнению с расстоянием до точки наблюдения области пространства. Это требование значительно ограничивает общность задачи.

Усредним силу торможения за время, в течение которого заряд многократно проходит указанную область. В таком случае на основании тождества $\dddot{\vec r}\dot{\vec r} = \frac{d}{dt}(\ddot{\vec r}\dot{\vec r}) - (\ddot{\vec r})^2$ можно заключить, что сила радиационного трения определяется выражением

$$\vec F_r = \frac{2fq^2}{3c}\dddot{\vec r} = \frac{2fq^2}{3c}\dot{\vec a}, \tag{11.3}$$

где $\vec a$ — ускорение материальной точки, несущей заряд. Величина $\frac{d}{dt}(\ddot{\vec r}\dot{\vec r})$ есть полная производная по времени. При усреднении по движению заряда в ограниченной области пространства она исчезает. Величина $\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \frac{d}{dt}(\ddot{\vec r}\dot{\vec r})\,dt = \frac{\ddot{\vec r}(\tau)\dot{\vec r}(t) - \ddot{\vec r}(0)\dot{\vec r}(0)}{\tau}$ достаточно мала, если интервал изменения $\ddot{\vec r}\dot{\vec r}$ конечен, а τ велико.

Формула (11.3) применима с рядом ограничений. Во-первых, движение должно быть нерелятивистским ($v \ll c$), иначе несправедливо само дипольное приближение. Во-вторых, как мы сейчас увидим, радиационная сила должна быть значительно меньше силы Лоренца, чтобы уравнение движения заряда имело смысл. Наконец, это лишь среднее значение силы.

Итак, мы пришли к силе, зависящей от скорости изменения ускорения. Такие силы в механике не рассматриваются, и, вообще говоря, они приводят к противоречащим опыту результатам. Запишем уравнение движения с учетом силы торможения (11.3):

$$m\vec a = \vec F + \frac{2fq^2}{3c}\dddot{\vec r}. \tag{11.4}$$

В случае, когда $F \ll F_r$, уравнение принимает вид:

$$m\ddot{\vec r} = \frac{2fq^2}{3c}\dddot{\vec r} \tag{11.5}$$

и его решением служит, как в этом легко убедиться непосредственным дифференцированием, функция

$$\vec a = \vec a_0 e^{\frac{3mc}{2fq^2}t}.$$

Отсюда следует, что ускорение движения неограниченно растет вследствие излучения, а это, в свою очередь, приводит к увеличению интенсивности излучения. Происходит неограниченный саморазгон частицы и рост излучения вопреки закону сохранения энергии. Поэтому уравнение (11.4) применяют только в случаях $F \gg F_r$, когда ускорение частице в основном придает сила Лоренца, а радиационное трение лишь незначительно влияет на скорость. В таких случаях уравнение (11.4) достаточно точно описывает движение.

11.2. Рассеяние электромагнитных волн свободным зарядом. Рассчитаем излучение точечного заряда, движущегося во внешнем переменном электромагнитном поле.

Пусть на заряд падает плоская монохроматическая электромагнитная волна. Заряд под ее действием приходит в ускоренное движение и излучает вторичную волну. Этот процесс называют *рассеянием* электромагнитных волн. На материальную точку с зарядом q электромагнитная волна действует с силой Лоренца. Магнитная составляющая силы Лоренца при нерелятивистских скоростях движения исчезающе мала по сравнению с электрической и может быть опущена. Для силы Лоренца ниже используется выражение.

$$\vec{F} = q\vec{E}_0 e^{\imath(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \tag{11.6}$$

(Экспоненциальная форма удобна в вычислениях. При вещественном $\vec{E}_0$ для перехода к тригонометрической форме в окончательном результате нужно взять действительную часть: $\mathrm{Re}\, e^{\imath\omega t} = \cos\omega t$.) Предполагая, что длины волн велики по сравнению с областью движения заряда, имеем $\vec{k}\vec{r} \sim \frac{r}{\lambda} \ll 1$ и

$$\vec{F} = q\vec{E}_0 e^{\imath\omega t}. \tag{11.7}$$

Найдем теперь условие, при котором сила радиационного трения оказывается малой по сравнению с внешней периодической силой. Если

$$|\vec{F}| \gg \frac{2fq^2}{3c}|\dot{\vec{a}}|,$$

то $m\vec{a} \approx \vec{F}$ и

$$qE_0 \gg \frac{2fq^2}{3c}\,\frac{|\dot{\vec{F}}|}{m},$$

или

$$qE_0 \gg \frac{2fq^2\omega}{3mc} qE_0,$$

откуда

$$\frac{2fq^2\omega}{3mc} \ll 1.$$

Учитывая, что $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, получим условие малости силы радиационного трения в виде

$$\lambda \gg \frac{fq^2}{m}. \tag{11.8}$$

Неравенство (11.8) можно использовать для оценки применимости макроскопической электродинамики к процессам рассеяния света веществом. Рассеяние происходит на электронах. Для них

$$r_0 = \frac{fe^2}{m} \simeq 2{,}8 \cdot 10^{-15}\ \text{м} \tag{11.9}$$

так называемый классический радиус электрона. Таким образом, взаимодействие электромагнитного поля с электронами правильно описывается макроскопической электродинамикой до тех пор, пока длина волны значительно превышает классический радиус электрона. (Но уже на расстоянии порядка 10^{-10} м для описания движения этой частицы нужно использовать квантовую механику.)

Дальнейшие вычисления произведем для электрона, так как именно эта задача имеет очень важное практическое значение. Предположим, что при анализе движения радиационным трением можно пренебречь (т. е. «отдача» излучения мала). Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E}_0 e^{i\omega t}. \tag{11.10}$$

Отсюда найдем вторую производную дипольного момента, входящую во все формулы излучения в дипольном электрическом приближении:

$$\ddot{\vec{p}} = -e\ddot{\vec{r}} = \frac{e^2}{m}\vec{E}_0 e^{i\omega t}. \tag{11.11}$$

Пользуясь далее формулами (10.11), (10,12), имеем

$$\vec{E} = \frac{r_0}{r}[[\vec{E}_0\vec{n}]\vec{n}]e^{i\omega\tau}, \qquad \vec{B} = \frac{r_0}{cr}[\vec{E}_0\vec{n}]e^{i\omega\tau}, \tag{11.12}$$

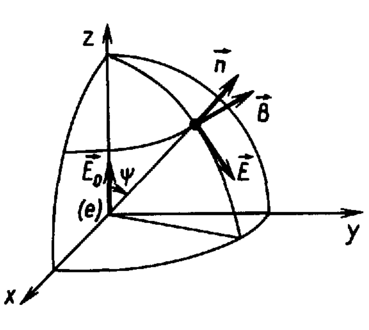
где r_0 – классический радиус электрона (11.9). На рисунке 11.1 показано направление вектора напряженности падающей волны и векторов поля рассеянной волны. Угол между $\vec{E}_0$ и направлением на точку наблюдения обозначим ψ.

Вычислим плотность потока энергии излучения по формуле (10.14):

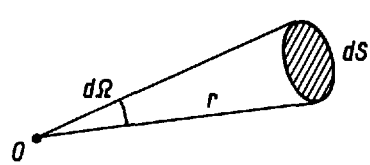
$$\sigma = \frac{r_0^2 c}{r^2 c^2 \mu_0}(E_0 e^{i\omega\tau})^2 \sin^2\psi = \frac{c\,\varepsilon_0 r_0^2}{r^2}(E_0 e^{i\omega\tau})^2 \sin^2\psi. \tag{11.13}$$

Выделяя в формуле (11.13) вещественную часть и усредняя поток за период, имеем

$$\bar{\sigma} = \frac{c\varepsilon_0 r_0^2}{2}\,\frac{E_0^2 \sin^2\psi}{r^2}. \tag{11.14}$$



11.1



11.2

Введем важные характеристики рассеяния: *интенсивность излучения* при рассеянии и *сечение рассеяния*.

Под *интенсивностью* излучения понимают поток энергии, приходящийся на телесный угол $d\Omega$. Он проходит через площадку dS на поверхности сферы радиусом r (рис. 11.2). Ясно, что $dS = r^2 d\Omega$ и

$$dN = \vec{\sigma}\,\overrightarrow{dS} = \frac{c\varepsilon_0 r_0^2}{2} E_0^2 \sin^2\psi d\Omega. \qquad (11.15)$$

Вычислим среднюю плотность потока энергии в падающей волне. Знаем, что

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Подставляя это значение напряженности в формулу для потока (9.12) и усредняя по времени, получим

$$\sigma_{\text{пад}} = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}. \qquad (11.16)$$

Теперь можно найти отношение интенсивности рассеянной волны в направлении ψ к плотности потока падающей волны:

$$d\sum = \frac{dN}{\sigma_{\text{пад}}} = r_0^2 \sin^2\psi\, d\Omega. \qquad (11.17)$$

Эта величина имеет размерность площади и пропорциональна квадрату классического радиуса электрона. Она носит название *дифференциального сечения рассеяния* электромагнитных волн на электроне.

Сечение рассеяния (11.17) получено для поляризованного излучения. Чтобы перейти к неполяризованному, результат следует усреднить по всевозможным ориентациям вектора $\vec{E}_0$. Пусть падающая волна движется вдоль Oz, а вектор $\vec{E}_0$ направлен по Ox (рис. 11.3). Установим связь между углами ψ и ϑ, для чего спроецируем вектор $\vec{n}$ на ось Ox:

$$\cos\psi = \sin\vartheta\cos\alpha.$$

Как следствие,

$$\sin^2\psi = 1 - \sin^2\vartheta\cos^2\alpha.$$

Если вращать вектор $\vec{E}_0$ в плоскости Oxy, то изменяется угол α, а вместе с ним – и угол ψ. Различные ориентации вектора напряженности соответствуют той или иной поляризации падающей волны. Усредняя сечение рассеяния по α, находим:

$$\overline{d\sum} = r_0^2 d\,\Omega\,\overline{\sin^2\psi} = r_0^2\, d\,\Omega\,(1 - \sin^2\vartheta\,\overline{\cos^2\alpha}).$$

Так как

$$\overline{\cos^2\alpha} = \frac{1}{2},$$

а

$$1 - \frac{\sin^2\vartheta}{2} = \frac{1+\cos^2\vartheta}{2},$$

то

$$\overline{d\sum} = r_0^2\frac{1+\cos^2\vartheta}{2} d\Omega.$$

Из данной формулы следует, что имеются два направления, по которым сечение рассеяния максимально: это направление движения падающей волны и обратное ему направление.

Введем также *интегральное или полное сечение рассеяния* определением

$$\sum = \int d\sum.$$

Для неполяризованного излучения

$$\sum = \frac{r_0^2}{2}\int(1 + \cos^2\vartheta)\, d\Omega,$$

что дает при вычислении выражение:

$$\sum = \frac{r_0^2}{2}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} (1 + \cos^2\vartheta)\cdot \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

Применяемое в теории и на практике *полное сечение рассеяния* равно отношению мощности рассеянного излучения к плотности потока энергии падающей волны:

$$\sum = \frac{\bar{N}}{\sigma_{\text{пад}}}. \tag{11.18}$$

Подставляя сюда значения σ и $\bar{N}$ по формулам (11.1), (11.11) и (11.16), получаем для электрона

$$\sum = \frac{8\pi}{3} r_0^2, \tag{11.19}$$

что совпадает с выведенной выше формулой.

Полное сечение имеет наглядную геометрическую интерпретацию: из падающего потока энергии рассеивается та часть, которая попадает на площадку $\sum$. (Соответственно для электрона классический радиус r_0 по порядку величины оказывается радиусом этой круговой площадки.)

Формула (11.19) известна в оптике под названием формулы Томсона. Она имеет фундаментальное значение для рассеяния электромагнитных волн свободными или слабосвязанными зарядами вещества. Ее можно использовать и при высоких частотах падающих волн, она применима вплоть до волн длиной в 10^{-10} м.

Методические указания и рекомендации

I. Изучение свободного электромагнитного поля как самостоятельного физического объекта существенно в методологическом плане. В методическом же отношении – это продолжение решения волновых уравнений, начатого ранее в главе I. Теперь анализируются векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$, рассчитываемые с помощью волновых потенциалов.

В вопросах излучения электромагнитных волн избран единый для всего курса путь – решение с помощью найденных в главе I запаздывающих потенциалов. В принципиальном плане дипольное электрическое излучение исчерпывает существо явления. Для практики существенно и магнитное излучение, которое кратко рассмотрено. Следует заметить, что материал по излучению электромагнитных волн относится к наиболее трудному для усвоения и требует тщательной проработки под руководством преподавателя.

Вопросы о рассеянии электромагнитных волн могут изучаться