Остается просуммировать поток энергии от всех электронов:

$$N = N_0 A d n = 6{,}7 \cdot 10^{-24} \text{ Вт.}$$

Глава IV
РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Электромагнитное поле по своей природе является предельно релятивистским объектом: оно распространяется в пространстве со скоростью света. Уравнения поля ковариантны по отношению к преобразованиям Лоренца, т. е. сохраняют одну и ту же форму написания во всех инерциальных системах отсчета. Это обстоятельство не является очевидным, ибо уравнения Максвелла обычно используются в трехмерной форме, тогда как для ковариантной записи им следует придать четырехмерную форму.

Вышеизложенный материал не требовал анализа релятивистских особенностей уравнений поля, релятивистской природы законов электромагнетизма. Однако эти вопросы имеют принципиальное значение, и для них отводится специальная тема курса. При изучении данной темы требуется знание основ СТО; соответствующий материал изложен в главе I части II курса теоретической физики (см. [1]).

§ 12. Релятивистская ковариантность уравнений электродинамики

12.1. Четырехмерный вектор плотности тока. Четырехмерная форма закона сохранения заряда. Основные уравнения электромагнитного поля, их решения и следствия справедливы в инерциальных системах отсчета. Релятивистский характер электромагнитных явлений формально отражается в ковариантности основных законов электродинамики и в определенных трансформационных свойствах электромагнитных величин по отношению к преобразованиям Лоренца. Запишем преобразования в виде:

$$x'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\alpha\beta} x_\beta, \quad \alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{12.1}$$

где $\Lambda_{\alpha\beta}$ — элементы матрицы преобразований Лоренца:

$$
\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (12.2)
$$

В формуле (12.1) обозначения x'_α, x_β соответствуют радиус-векторам точек четырехмерного пространства с координатами

$$x_0 = ict,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,$$

т. е.

$$x_\alpha = (ict,\ x,\ y,\ z).$$

Может быть использована более короткая запись с выделением временной и пространственной частей 4-вектора:

$$x_\alpha = (ict,\ \vec{r}). \qquad (12.3)$$

В матрице преобразований Лоренца (12.2) V – модуль скорости движения одной системы в другой (при совпадении осей Ox и $O'x'$).

Ковариантность уравнений означает, что величины, характеризующие систему *электромагнитное поле-заряды*, должны быть или скалярами, или векторами, или тензорами преобразований Лоренца, преобразующимися при переходе от нештрихованной системы к штрихованной по закону:

для скаляра

$$f' = f, \qquad (12.4\text{-а})$$

для вектора

$$A'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\alpha\beta} A_\beta, \qquad (12.4\text{-б})$$

для тензора (второго ранга)

$$F'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma\delta} \Lambda_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta\delta} F_{\gamma\delta}. \qquad (12.4\text{-в})$$

Формулы (12.4) применяются как для преобразования величин, не зависящих от координат точки пространства, таких, например, как скаляр c, 4-вектор v_α, так и для «полевых» величин, являющихся функциями координат точки 4-пространства x_α В последнем случае они требуют пояснений.

Пусть $f = f(x_\alpha)$, $A_\alpha = A_\alpha(x_\alpha)$, $F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}(x_\alpha)$. Вычислим значения этих функций для некоторой точки пространства-времени в разных ИСО. Если имеем дело со скаляром, то $f(x_\alpha) = f(x'_\alpha)$. Для векторов и тензоров такое равенство несправедливо: $A_\alpha(x_\alpha) \neq A'_\alpha(x'_\alpha)$, $F_{\alpha\beta}(x_\alpha) \neq F'_{\alpha\beta}(x'_\alpha)$. Но между всеми проекциями 4-вектора или элементами тензора существуют зависимости, отраженные формулами (12.4). Иными словами, в общем случае формулы (12.4) устанавливают связь между полевыми величинами в одной и той же (любой) точке пространства-времени в разных ИСО.

Левые и правые части ковариантных уравнений электромагнетизма должны иметь одинаковые трансформационные свойства либо скаляров, либо векторов, либо тензоров одного и того же ранга.

Перечисляя свойства электрического заряда в § 1, п. 1.1, мы указали, что он считается скаляром или инвариантом преобразований Лоренца, т. е.

$$Q' = Q. \tag{12.5}$$

Положение об инвариантности заряда в релятивистской электродинамике берется в качестве исходного принципа.

Из определения плотности заряда (1.2) следует, что эта величина не является скаляром преобразований Лоренца. В самом деле,

$$\varrho = \frac{dQ}{dV},$$

но объем при переходе от одной системы к другой изменяется, вместе с ним изменяется и ϱ. С учетом соотношения [1], ч. II (2.1)

$$dV = dV_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

имеем формулу преобразования плотности заряда

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{12.6}$$

где ϱ_0 – плотность зарядов в системе, где они покоятся. Заметим, что по определению ϱ_0 есть скаляр преобразований Лоренца.

Три проекции вектора плотности тока $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$ не образуют 4-вектор, однако вместе с плотностью заряда из них 4-вектор можно получить. Построим заведомый 4-вектор, умножая скаляр ϱ_0 на 4-вектор:

$$j_\alpha = \varrho_0 v_\alpha, \tag{12.7}$$

где v_α – 4-вектор скорости движения зарядов (см. [1], ч. II, § 3, п. 3.2). Вспоминая выражения проекций 4-вектора скорости

$$v_\alpha = \left(\frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\right),$$

запишем формулы (12.7) в развернутом виде:

$$j_\alpha = \left(\frac{ic\varrho_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \frac{\varrho_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\right) = (ic\varrho, \vec{j}). \tag{12.8}$$

Пространственная часть 4-вектора (12.8) есть вектор плотности тока, поэтому j_α называют 4-вектором плотности тока.

Пример 12.1. **Преобразование 4-вектора плотности тока от одной ИСО к другой.**

Переход от одной инерциальной системы к другой совершается с помощью преобразований (12.4-б). Применим преобразования к вектору j_α. Пусть в нештрихованной системе заряды покоятся, т. е.

$$j_\alpha = (ic\varrho_0,\ 0).$$

В таком случае для штрихованной системы, движущейся в нештрихованной со скоростью $\vec{V}$ вдоль оси Ox, получаем

$$j'_\alpha = \left(\frac{ic\varrho_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ \frac{-\varrho_0\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right).$$

В нерелятивистском приближении результат очевиден:

$$\varrho' = \varrho_0,\ \vec{j}' = -\varrho_0\vec{V}, \qquad (12.9)$$

ток возникает вследствие движения зарядов в данной системе. Релятивистское же возрастание плотности заряда и тока связано с уменьшением размеров движущегося объема, занятого зарядами.

Запишем в четырехмерном виде уравнение непрерывности (1.6), являющееся выражением закона сохранения заряда в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0.$$

Используя обозначения координат точки 4-пространства (12.3), принятые в СТО, имеем

$$ic\frac{\partial\varrho}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0.$$

Отсюда с помощью формулы (12.8) получим

$$\sum_{\alpha=0}^{3}\frac{\partial j_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \qquad (12.10)$$

Уравнению непрерывности придана 4-мерная ковариантная форма. Она особенно наглядна при использовании 4-мерного оператора:

$$\nabla_\alpha = \left(\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t},\ \nabla\right).$$

Если теперь записать формулу (12.10) в виде

$$\nabla_\alpha j_\alpha = 0, \qquad (12.11)$$

то уравнение непрерывности (12.11) можно прочитать следующим образом: четырехмерная дивергенция 4-вектора плотности тока равна нулю.

Таким образом, полагая электрический заряд скаляром преобразований Лоренца, мы убедились в справедливости закона сохранения заряда во всех инерциальных системах. Скалярный характер электрического заряда и закон сохранения этой величины оказались взаимосвязанными.

12.2. Ковариантность уравнений электромагнитного поля в потенциалах. Обратимся к потенциалам электромагнитного поля φ и $\vec{A}$ и формально объединим скалярный и векторный потенциалы поля в матрицу-столбец:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{i}{c}\varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}. \tag{12.12}$$

Используем также 4-оператор Даламбера:

$$\Box = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

являющийся скаляром преобразований Лоренца.

Выпишем уравнения электромагнитного поля в потенциалах:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j},$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho.$$

Нетрудно видеть, что с помощью введенной величины A_α и оператора $\Box$ они принимают вид

$$\Box A_\alpha = -\mu_0 j_\alpha. \tag{12.13}$$

Справа в выражении (12.13) стоит вектор преобразований Лоренца j_α. Поэтому 4-вектором является и величина A_α, если μ_0 — скаляр преобразований. Инвариантность μ_0 и ε_0 вытекает из соотношения

$$\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2},$$

где c — инвариантная скорость света. (Разумеется, единицы измерения выбраны во всех ИСО одинаковые.)

Итак, если потенциалы φ и $\vec{A}$ объединяются в 4-вектор потенциала электромагнитного поля, то уравнения (12.13) сохраняют форму во всех инерциальных системах отсчета, т. е. ковариантны.

Запишем также в ковариантной форме условие калибровки потенциалов (4.5). Оно принимает вид

$$\sum_{\alpha=0}^{3}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0,$$

или $$\nabla_\alpha A_\alpha = 0. \tag{12.14}$$

Четырехмерная форма записи уравнений поля не только наглядно показывает ковариантность их по отношению к лоренцовым преобразованиям, но и дает общий метод преобразования величин, входящих в уравнения. Так, по формулам (12.4) преобразуются потенциалы поля, а от них можно перейти и к векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Однако мы выберем другой, математически более простой способ нахождения формул пересчета напряженности и индукции.

Пример 12 2 **Формулы преобразования потенциалов поля.**
Используя формулы 12 4 и определение 4-потенциала (12 12), имеем

$$A'_0 = \frac{A_0 - i\dfrac{V}{c}A_1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad A'_1 = \frac{A_1 + i\dfrac{V}{c}A_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}},$$

$$A'_2 = A_2, \quad A'_3 = A_3$$

Переходя к трехмерным величинам, получаем для скалярного и векторного потенциалов

$$\varphi' = \frac{\varphi - VA_x}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad A'_x = \frac{A_x - \dfrac{V}{c^2}\varphi}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}},$$

$$A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z$$

§ 13. Тензор электромагнитного поля. Преобразование векторов напряженности и индукции электромагнитного поля при переходе от одной инерциальной системы к другой

13.1. Тензор электромагнитного поля. В предыдущем параграфе доказана лоренц-ковариантность уравнений поля в потенциалах. Это значит, что они справедливы в любой инерциальной системе отсчета и в трехмерной форме, применявшейся нами ранее. Разумеется, векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ изменяются при переходе от одной системы к другой. Пересчет их можно выполнить следующим способом. Рассмотрим величину, представляющую собой по определению антисимметричный тензор второго ранга:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}. \tag{13.1}$$