

или

$$\nabla_{\alpha} A_{\alpha} = 0. \quad (12.14)$$

Четырехмерная форма записи уравнений поля не только наглядно показывает ковариантность их по отношению к лоренцовым преобразованиям, но и дает общий метод преобразования величин, входящих в уравнения. Так, по формулам (12.4) преобразуются потенциалы поля, а от них можно перейти и к векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Однако мы выберем другой, математически более простой способ нахождения формул пересчета напряженности и индукции.

Пример 12.2 Формулы преобразования потенциалов поля.

Используя формулы 12.4 и определение 4-потенциала (12.12), имеем

$$A'_0 = \frac{A_0 - v \frac{V}{c} A_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A'_1 = \frac{A_1 + v \frac{V}{c} A_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ A'_2 = A_2, \quad A'_3 = A_3$$

Переходя к трехмерным величинам, получаем для скалярного и векторного потенциалов

$$\varphi' = \frac{\varphi - v A_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A'_x = \frac{A_x - \frac{V}{c^2} \varphi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z$$

### § 13. Тензор электромагнитного поля. Преобразование векторов напряженности и индукции электромагнитного поля при переходе от одной инерциальной системы к другой

13.1. Тензор электромагнитного поля. В предыдущем параграфе доказана лоренц-ковариантность уравнений поля в потенциалах. Это значит, что они справедливы в любой инерциальной системе отсчета и в трехмерной форме, применявшейся нами ранее. Разумеется, векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  изменяются при переходе от одной системы к другой. Пересчет их можно выполнить следующим способом. Рассмотрим величину, представляющую собой по определению антисимметричный тензор второго ранга:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}. \quad (13.1)$$

Используя формулы  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ,  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ,

а также определение 4-радиус-вектора (12.3), нетрудно найти все элементы тензора:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{i}{c} E_x & \frac{i}{c} E_y & \frac{i}{c} E_z \\ -\frac{i}{c} E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{i}{c} E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{i}{c} E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (13.2)$$

Тензор  $F_{\alpha\beta}$  называется тензором электромагнитного поля. В этой величине объединены электрические и магнитные характеристики поля, поэтому тензор дает полное описание поля.

С помощью тензора электромагнитного поля (13.2) уравнения Максвелла (2.1) или (2.3) записываются в ковариантной форме. Читателю предлагается в качестве примера проверить следующие утверждения.

Первая пара уравнений Максвелла (2.1) эквивалентна одному тензорному уравнению

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = 0, \quad (13.3)$$

причем все три индекса  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  принимают только различные значения. (Если два или три индекса совпадают, то получается тождество  $0 = 0$ .)

Вторая пара уравнений (2.1) заменяется формулой

$$\sum_{\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \mu_0 j_\alpha, \quad (13.4)$$

в которой индексы  $\alpha$  и  $\beta$  принимают значения 0, 1, 2, 3.

Полученные результаты в виде формул (13.3) и (13.4) замечательны в следующих отношениях. Во-первых, описание поля с помощью одной тензорной характеристики подчеркивает единство его и условность подразделения поля на электрическое и магнитное. Во-вторых, ковариантность уравнений Максвелла наглядно показывает релятивистскую природу электромагнитных полей, основных законов электродинамики, релятивистский их характер. В-третьих, открывается простой путь для нахождения формул преобразования векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  из одной инерциальной системы в другую (средствами тензорного исчисления).

**13.2. Преобразование векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  при переходе от одной инерциальной системы к другой. Инварианты поля.** Проекция вектора электрической напряженности поля  $\vec{E}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$  связаны с компонентами тензора  $F_{\alpha\beta}$  (см. (13.2)). Поэтому формулы

преобразования их при переходе из одной ИСО в другую могут быть найдены из общего правила преобразования тензорных величин (12.4-в):

$$F'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=0}^3 \sum_{\delta=0}^3 \Lambda_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta\delta} F_{\gamma\delta}.$$

Давая индексам нужные для получения проекций  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  согласно матрице (13.2) значения (например,  $F_{1,2} = B_z$ ,  $F_{0,1} = \frac{i}{c} E_x$  и т. д.) получаем

$$\left\{ \begin{array}{ll} E'_x = E_x, & B'_x = B_x; \\ E'_y = \frac{E_y - VB_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & B'_y = \frac{B_y + \frac{V}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \\ E'_z = \frac{E_z + VB_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & B'_z = \frac{B_z - \frac{V}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{array} \right. \quad (13.5)$$

Формулы обратных преобразований можно получить обращением знака скорости  $V$ . Они часто удобнее формул (13.5) по той причине, что, связывая с движущимся телом (частицей) штрихованную систему, имеем в нештрихованной для нее скорость движения  $\vec{V}$ , а не  $-\vec{V}$ , как в случае (13.5). Выпишем формулы преобразования от штрихованной системы к нештрихованной:

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_x = E'_x, & B_x = B'_x; \\ E_y = \frac{E'_y + VB'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & B_y = \frac{B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \\ E_z = \frac{E'_z - VB'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{array} \right. \quad (13.6)$$

Из соотношений (13.5) или (13.6) отчетливо виден относительный характер разделения поля на электрическое и магнитное.

**Пример 13.1. Преобразование электрического поля к другим системам отсчета.**

Пусть в некоторой ИСО имеет место только электрическое поле  $\vec{E}$  ( $\vec{B} = 0$ ). В других системах имеются и электрическое, и магнитное поля:

$$E_x = E'_x, \quad B_x = 0;$$

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad B_y = \frac{-\frac{V}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = -\frac{V}{c^2} E_z;$$

$$E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad B_z = \frac{\frac{V}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{V}{c^2} E_y.$$

Связь между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в этом случае выражается формулой

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \vec{E}].$$

Следовательно, магнитное поле перпендикулярно электрическому, а также направлению движения системы. Аналогично: если в штрихованной системе существует одно магнитное поле  $\vec{B}'$ , а  $\vec{E}' = 0$ , то в нештрихованной появляется и электрическое, причем

$$\vec{E} = -[\vec{V} \vec{B}].$$

Из примера видно, что проявление электрического или магнитного поля зависит от выбора системы отсчета.

В релятивистской физике особенно важное значение имеют не относительные, а абсолютные величины — инварианты (или скаляры) преобразований Лоренца.

Получим инвариантные для электромагнитного поля величины. По свойствам тензоров свертка тензора по обоим индексам есть скаляр преобразований Лоренца. Вычисление свертки тензора (13.2) дает

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2 \left( B^2 - \frac{1}{c^2} E^2 \right), \quad (13.7)$$

так что

$$B^2 - \frac{1}{c^2} E^2 = Inv^{(1)}.$$

Прямым применением формул (13.5) убеждаемся, что инвариантно и скалярное произведение векторов поля:

$$\vec{E} \vec{B} = Inv^{(2)}. \quad (13.8)$$

Инвариантные величины в каждой точке пространства не зависят от выбора ИСО. В ряде случаев их удобно использовать при пересчете поля из одной системы в другую.

**Пример 13.2. Формулы преобразования векторов поля при нерелятивистских скоростях движения ( $V \ll c$ ).**

Из формул (13.6) получаем

$$\begin{cases} E_x = E'_x, & B_x = B'_x; \\ E_y = E'_y + VB'_z, & B_y = B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z \simeq B'_y; \\ E_z = E'_z - VB'_y, & B_z = B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y \simeq B'_z. \end{cases} \quad (13.9)$$

Во втором столбце формул (13.6) пренебрегаем не только членом  $\frac{V^2}{c^2}$ , но и  $\frac{V}{c^2} E'_z$  и  $\frac{V}{c^2} E'_y$ , что оправдано следующими условиями: действие поля на заряды задано силой Лоренца (1.8), а проекция ее магнитной составляющей на ось  $Oz$  (в нашем случае  $q \frac{V^2}{c^2} E'_z$ ) пренебрежимо мала по сравнению с электрической составляющей ( $qE'_z$ ), то же и для других проекций.

Из формул (13.9) видно, что относительный характер разделения поля на магнитное и электрическое имеет место и при нерелятивистских скоростях движения. Так, если в нештрихованной системе было только магнитное поле  $\vec{B}$  ( $\vec{E} = 0$ ), то в штрихованной появляется и электрическое

$$\vec{E}' = [\vec{V} \vec{B}].$$

**Пример 13.3. Сила Лоренца в нерелятивистской области.**

Если точечный заряд  $q$  покоится в штрихованной системе, то на него действует сила

$$\vec{F}' = q\vec{E}' = q[\vec{V} \vec{B}].$$

(См. конец примера 13.2) Так как в нерелятивистской области сила инвариантна (во всех инерциальных системах отсчета имеет одно и то же значение), то та же по величине сила действует на заряд и в нештрихованной системе, где он движется со скоростью  $\vec{V}$  в магнитном поле:

$$\vec{F} = q[\vec{V} \vec{B}]. \quad (13.10)$$

Таким образом получен вывод для магнитной составляющей силы Лоренца на основе формул преобразования вектора поля. (Формула (13.10) остается справедливой и при релятивистских скоростях, но вывод требует применения преобразований Лоренца к векторам поля и силы.)

**Пример 13.4. Вывод преобразования силы Лоренца при переходе от одной ИСО к другой.**

Выражение (1.8)

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \vec{B}] \quad (1)$$

преобразуем к штрихованной системе, вводя соответствующие значения  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  по формулам (13.6) и заменяя  $\vec{v}$  на  $\vec{v}'$  с помощью формул преобразования скорости (см. [1], ч. II, § 2, п. 2.4):

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}$$

Получаем для проекции силы на ось  $Ox$

$$F_x = qE_x + q(v_y B_z - v_z B_y) = qE_x + q \frac{v'_y B'_z - v'_z B'_y + \frac{V}{c^2} E'_y v'_y + \frac{V}{c^2} E'_z v'_z}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} =$$

$$= \frac{qE'_x + q[\vec{v}' \vec{B}']_x + q \frac{V}{c^2} \vec{E}' \vec{v}'}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}. \quad (2)$$

Из формулы (2) видно, что если использовать для силы Лоренца во всех ИСО выражение (1), то  $F_x$  преобразуется в соответствии с равенством

$$F_x = \frac{F'_x + \vec{v}'\vec{F}' \frac{V}{c^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}},$$

совпадающим с формулой преобразования проекции силы, выведенной в СТО (см. [1], ч. II, пример 6.1) То же относится и к двум другим проекциям силы:

$$F_y = \frac{F'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad F_z = \frac{F'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}.$$

Таким образом доказано, что определение силы Лоренца ковариантно по отношению к преобразованиям Лоренца, т. е. во всех ИСО справедлива формула (1).

**Пример 13.5. Ковариантная форма уравнения движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.**

В части II (см. [1], ч. II, § 6) обсуждалась ковариантная форма релятивистского уравнения динамики и было получено уравнение

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = f_\alpha, \quad (1)$$

где

$$p_\alpha = \left( \frac{imc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) - \quad (2)$$

4-импульс, а  $f_\alpha$  — 4-сила, связанная с трехмерной силой соотношением

$$f_\alpha = \left( \frac{i\vec{F}\vec{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (3)$$

Подставляя в (1) значения  $p_\alpha$  из (2) и вместо  $\vec{F}$  силу Лоренца (1.8), действующую на точечный электрический заряд  $q$ , получим уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = q\vec{E}\vec{v},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = q(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]).$$

Это и есть ковариантные уравнения движения заряженной частицы в поле, т. е. сохраняющие свою форму во всех ИСО при условии, что векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  преобразуются с помощью формул (13.5).

**Пример 13.6. Лоренц-инвариантная функция Лагранжа.**

Обычный вид функции Лагранжа для заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле, известен (см [1], ч II, (4.2)):

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + q\vec{A}\vec{v}. \quad (1)$$

Это выражение сводится к инвариантному

$$\tilde{L} = -mc^2 + qA_\alpha v_\alpha, \quad (2)$$

откуда и следует ковариантность уравнений движения, получаемых по методу Лагранжа из выражения (1).

**13.3. Эффект Доплера для электромагнитных волн.** Явление изменения частоты волны в зависимости от скорости движения источника в системе наблюдателя составляет эффект Доплера для света. Поскольку электромагнитное поле является предельно релятивистским объектом, многие явления и эффекты, связанные с полем, имеют релятивистскую природу. Таковой обладает и названный эффект. Для его анализа применим преобразования Лоренца 4-векторов, инварианты, образованные из них.

Плоская электромагнитная волна в пустоте имеет инвариантную скорость распространения во всех инерциальных системах отсчета, равную  $c$ . Пользуясь другими инвариантами электромагнитного поля (13.7) и (13.8), легко устанавливаем, что перпендикулярность векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$  и соотношение  $E = cB$  для их модулей сохраняются в любой системе отсчета. Однофазность колебаний векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  во всех ИСО свидетельствует о том, что фаза колебаний  $\Phi = \vec{k}\vec{r} - \omega t$  есть скаляр преобразований Лоренца, а входящие в нее волновой вектор  $\vec{k}$  и частота колебаний  $\omega$  преобразуются при переходе от одной системы к другой.

Изменение частоты представляет собой эффект Доплера, а изменение направления волнового вектора  $\vec{k}$  — абберацию света. Очевидно, что в силу равноправия систем эффекты одинаковы при движении источника и приемника, т. е. определяются их относительной скоростью.

Выведем теперь зависимость  $\omega$  от скорости движения источника света. Для этого выберем две системы, у которых оси  $Ox$  и  $O'x'$  параллельны этой скорости  $\vec{V}$ . В штрихованной системе источник покоится. На рисунке 13.1  $\vec{k}$  — волновой вектор в нештрихованной системе, где источник движется со скоростью  $\vec{V}$ ;  $\vartheta$  — угол, под которым свет приходит к наблюдателю в системе координат  $Ox$ . Аналогично  $\vec{k}'$  и  $\vartheta'$  — величины, измеряемые наблюдателем в штрихованной системе  $O'x'y'$ .

Заметим, что скаляр  $\Phi$  можно представить как произведение двух 4-векторов:

$$\Phi = k_\alpha x_\alpha,$$

$$\text{где } k_\alpha = \left( \frac{i\omega}{c}, \vec{k} \right)$$

Пользуясь формулой (12.4-б) для преобразования 4-вектора

$$k'_\alpha = \sum_{\beta} \Lambda_{\alpha\beta} k_\beta$$

и матрицей преобразований Лоренца (12.1), имеем для временной составляющей волнового вектора выражение

$$k'_0 = \frac{k_0 - \frac{iV}{c} k_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (13.11)$$

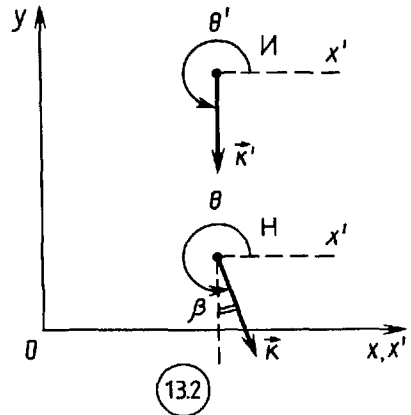
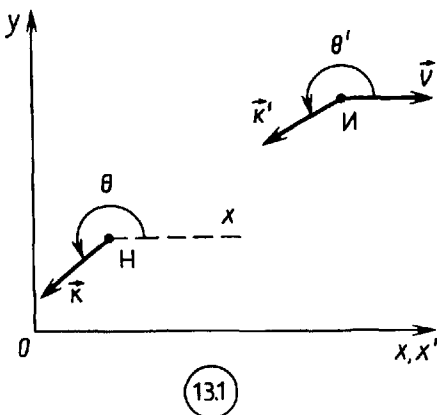
Из рисунка видно, что  $k_1 = k_x = k \cos \vartheta$ . Формула (13.11), если в нее подставить  $k_0 = \frac{i\omega}{c}$ ,  $k'_0 = \frac{i\omega'}{c}$ , дает правило преобразования частоты:

$$\omega' = \frac{\omega \left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Обозначим через  $\omega_0$  частоту света в системе, где источник покоится, и назовем ее собственной частотой. Частота, измеренная в системе отсчета, где источник движется, выражается через собственную частоту следующим образом:

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta}. \quad (13.12)$$

Согласно сделанным ранее разъяснениям формула (13.12) применима и в случае движения источника, и в случае движения наблю-





дателя, тогда как для упругих волн, например волн в среде, имеют место разные формулы: если движется источник, то

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta},$$

если движется наблюдатель, то

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{V}{c} \cos \vartheta \right).$$

Последние две формулы отличаются друг от друга членами второго порядка малости относительно величины  $\frac{V}{c}$ . В принципе эффект Доплера мог бы играть роль, аналогичную опыту Майкельсона: изменение частоты при движении источника и наблюдателя в соответствии с формулой (13.12) служит доказательством отсутствия светоносной среды и равноправия инерциальных систем отсчета.

Рассмотрим важные частные случаи проявления эффекта Доплера:

а)  $\vartheta = 180^\circ$ , источник удаляется от наблюдателя. В таком случае

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}},$$

и  $\omega < \omega_0$ . Наблюдается, например, уменьшение частот известных линий излучения в спектрах далеких галактик. Это явление носит название «красного смещения» и интерпретируется как «разбегание» галактик, увеличение расстояний между ними. Красное смещение позволяет определить исходя из этих предположений радиальную составляющую скорости движения галактик (по отношению к Земле).

б)  $\vartheta = 0$ , источник приближается к наблюдателю. Частота увеличивается по формуле

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}.$$

в) Случай  $\vartheta = 90^\circ$  соответствует «поперечному» эффекту Доплера:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Поперечный эффект Доплера может послужить прямым подтверждением замедления хода процессов на движущихся телах. В нерелятивистской физике его нет. В 1938 г. Айвсом были поставлены специальные опыты с каналовыми лучами, подтвердившие с высокой точностью этот релятивистский эффект.

Заметим, что с помощью эффекта Мессбауера в ядерной физике

фиксируется изменение частот  $\gamma$ -лучей, обусловленное движениями со скоростями всего несколько см/с, что позволяет зафиксировать эффект Доплера, вызванный весьма медленным движением источника.

### Пример 13.7. Аберрация света.

Явление аберрации или изменения направления света, вызванное относительным движением источника и приемника света, можно рассмотреть как следствие преобразований Лоренца.

Напомним, что исходя из классической формулы сложения скоростей при направлении распространения света, перпендикулярном к направлению движения, имеем для угла аберрации  $\beta$  (рис. 13.2)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v}{c}. \quad (1)$$

Понятно, что эта формула является приближенной и может использоваться лишь при  $v \ll c$ .

Для вывода релятивистской формулы аберрации получим связь углов  $\vartheta$  и  $\vartheta'$ . Для этого выпишем формулу преобразования компоненты  $k_1$

$$k'_1 = \frac{k_1 + \frac{iV}{c} k_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (2)$$

откуда следует

$$k' \cos \vartheta' = \frac{k \cos \vartheta - \frac{V}{c} \frac{\omega}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Вспоминая, что  $\omega = ck$ , имеем

$$\omega' \cos \vartheta' = \frac{\omega \left( \cos \vartheta - \frac{V}{c} \right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Теперь подставим сюда значение частоты из формулы эффекта Доплера:

$$\cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta}. \quad (3)$$

Используя преобразование для компоненты  $k'_2$ , аналогично получим

$$\sin \vartheta' = \frac{\sin \vartheta \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta}. \quad (4)$$

Однако нас интересует зависимость измеряемого угла  $\vartheta$  в системе, где источник света движется, от угла  $\vartheta'$ . Обратные формулы получим обращением знака скорости в формулах (3) и (4). Деля затем (4) почленно на (3), имеем

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\cos \vartheta' + \frac{V}{c}} \quad (5)$$

Общая формула (5) для aberrации света найдена

Пусть свет испускается перпендикулярно направлению движения, т. е.  $\vartheta' = 270^\circ$  (см. рис. 13.2), тогда

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{c}{V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (6)$$

Из рисунка видно, что  $-\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{ctg} \beta$ , т. е.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (7)$$

Это и есть релятивистская формула aberrации, соответствующая рассмотренной в начале примера классической формуле (1)

В общем случае произвольного угла  $\vartheta'$  aberrация определяется разностью углов  $\vartheta$  и  $\vartheta'$

### Методические указания и рекомендации

**I.** Важная в мировоззренческом плане тема изложена в главе с помощью аппарата тензорного исчисления в пространстве Минковского. При этом применен наиболее простой вариант для выражения метрики: использована мнимая единица у временной проекции векторов. Основа главы — преобразования поля при переходе от одной системы к другой. Все остальное имеет иллюстративный характер.

По данной главе может быть организована самостоятельная работа. Это в основном применение формулы преобразования 4-векторов, использование инвариантов в конкретных задачах.

**II.** При изучении главы контролируйте усвоение материала с помощью вопросов, углубляйте понимание его в упражнениях.

**§ 12.** Повторите основы СТО по книге [1], ч. II. На чем основана четырехмерная интерпретация преобразований Лоренца? В чем отличие пространства-времени от евклидова пространства? Какие величины являются инвариантами при переходе от одной ИСО к другой? Приведите примеры 4-векторов из релятивистской динамики. Продумайте, что означает инвариантность электрического заряда. Докажите инвариантность 4-оператора Даламбера, векторный характер  $\nabla_a$ . Докажите, что четыре величины  $\frac{1}{c} \varphi, A_x, A_y, A_z$  образуют 4-вектор. Исходя из формул (12.4) найдите формулы преобразования плотностей заряда и тока. Выведите формулы преобразований потенциалов поля. Почему скалярный и векторный потенциалы объединяются в одну величину? Повторите определение и свойства тензорных величин. Докажите, что совокупность величин (13.1)