

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ПРОЦЕССЫ В ВЕЩЕСТВЕ

Глава V ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВЕ

В этой части курса мы переходим к изучению электромагнитного поля в пространстве, заполненном веществом, т. е. поля в веществе или вещественной среде. Именно с полями в веществе чаще всего и приходится иметь дело на практике. (Изучение же поля в вакууме позволяло сосредоточить внимание на фундаментальных сторонах связей между полем и зарядами.)

Классическая электродинамика учитывает электрические и магнитные свойства вещества феноменологически посредством параметров: ε — диэлектрической проницаемости вещества и μ — магнитной проницаемости.

Кроме векторов \vec{E} и \vec{B} , для описания поля в веществе используются векторы: \vec{D} — индукция электрического и \vec{H} — напряженность магнитного полей.

В нашем курсе основные уравнения поля в веществе вводятся с помощью анализа роли зарядов, входящих в состав вещества. Этот подход в некоторой степени проясняет природу величин \vec{D} и \vec{H} , их связь с другими характеристиками поля и вещества.

§ 14. Усреднение уравнений микроскопического поля в веществе

14.1. Свободные и связанные заряды. В предыдущих темах изучалось электромагнитное поле электрических зарядов в вакууме. Сами заряды входили в уравнения через функции $q(\vec{r}, t)$ и $\vec{j}(\vec{r}, t)$. Обсуждалось лишь одно свойство носителей электрических зарядов — создавать электромагнитное поле, а их связь с веществом не рассматривалась; заряды считались некоей подвижной субстанцией, принимающей различные стационарные или изменяющиеся конфигурации в пространстве.

Но электрический заряд — это не особая субстанция, а свойство элементарных частиц, и существует заряд только вместе с элементарной частицей. Так что заряд всегда связан с веществом. Одни из заряженных частиц входят в состав атомов, молекул или расположены в узлах кристаллической решетки твердых тел и поэтому неспособны к свободному перемещению. Заряды таких частиц называются *связанными*. Другие частицы утратили связь с атомами и могут перемещаться в пределах конкретной вещественной среды. Это, например, электроны внутри проводника или в вакууме. Аналогично обстоит

дело с положительными или отрицательными ионами в жидкости, газе, вакууме. Заряды таких частиц называются *свободными*.

Вещественная среда, в состав которой входят только связанные заряды (ядра и электроны), называется *диэлектриком*. Диэлектрик, если на нем не помещены внешние посторонние заряды, — электронейтральная система: число положительных связанных зарядов равно числу отрицательных. Если на твердый диэлектрик поместить свободный заряд, то последний сохраняет на нем свое положение неопределенно долго, т. е. распределение (конфигурация) свободного заряда на диэлектрике сохраняется. (Здесь заряд называется свободным в смысле утери связи с породившим его электронейтральным телом.)

В состав проводящих тел и сред (*проводников*) входят свободные заряды, т. е. при электронейтральности проводника в нем есть заряды, способные свободно перемещаться. Воздействие внешних полей создает в проводниках *направленное движение зарядов* — *электрический ток*. Если изолированный проводник заряжен, т. е. на него помещены извне свободные заряды, то последние распределяются по поверхности проводника.

Какие же заряды мы имели в виду, когда изучали электромагнитное поле в вакууме? Прежде всего мы имели дело со свободными зарядами, т. е. с зарядами, утратившими связь с веществом. Они располагались либо в вакууме (элементарные носители двигались в пустоте), либо на телах, но влиянием тел на поле, которое создано свободными зарядами, можно было пренебречь. О таких телах лишь говорилось, что именно они создают ту или иную конфигурацию зарядов. Например, при расчете поля заряженного тела из диэлектрика на больших расстояниях от него полем электронейтральной системы зарядов самого диэлектрика можно пренебречь. Аналогично можно пренебрегать собственным полем линейного проводника, по которому идет ток, и рассматривать только магнитное поле тока в окружающем пространстве.

Разумеется, указанный подход пригоден не всегда, и сейчас мы от него откажемся. Учтем, что в наблюдаемые электромагнитные поля вносят вклад не только свободные заряды, утратившие связь с веществом, но и заряды, входящие в его структуру. В оставшейся части курса электродинамики объект исследования есть *система, состоящая из свободных внешних по отношению к веществу зарядов, вещества, полностью или частично заполняющего пространство, и электромагнитного поля, созданного как внешними зарядами, так и зарядами, входящими в состав вещества*. (Внутренние заряды могут быть и связанными, и свободными. Далее выяснится, что подразделение свободных зарядов на внешние и входящие в состав вещества во многих случаях не нужно.) Основная задача электродинамики остается прежней — нахождение поля по заданному распределению и движению свободных зарядов, но теперь с учетом влияния на поле вещества.

Связанные заряды имеют дискретный характер; микрополя, ими созданные, весьма сильно изменяются при переходе от одной точки тела к другой и весьма быстро изменяются во времени. Вследствие квантовых эффектов уравнения Максвелла — Лоренца неприменимы для описания движения микрочастиц и расчета полей в масштабах отдельного атома или элементарной кристаллической ячейки. Но это сейчас и не требуется. Рассматривая поле, созданное микрозарядами в веществе, в макроскопическом плане следует усреднить микрополя по пространству и времени. Фактически также обстоит дело и с электромагнитным полем системы свободных зарядов в вакууме: для макроскопических проявлений не принимался в расчет дискретный характер зарядов и поля; определялись параметры некоторого усредненного макрополя \vec{E} и \vec{B} , связанного с усредненной (по физически малому объему dV и промежутку времени dt) плотностью зарядов и токов, ρ и \vec{j} .

Итак, в электродинамике для расчета поля в веществе подразделяют заряды на свободные и связанные. Те и другие считают непрерывно распределенными по пространству. Поле в веществе складывается из усредненных микрополей свободных и связанных зарядов. Подчеркнем условный характер термина «связанные заряды»: они ничем не отличаются от свободных, кроме того обстоятельства, что связанные заряды входят в состав атомов и молекул вещества, а свободные утратили связь с конкретным ядром. Важен следующий момент: свободные заряды могут быть для рассматриваемого тела как внешними, принесенными извне, так и внутренними, входящими в состав проводника. Связанные же заряды всегда внутренние. Так, если на диэлектрике помещен дополнительный заряд извне, то он свободен, хотя и не может в силу строения диэлектрика перемещаться.

14.2. Усредненные уравнения поля для системы свободных и связанных зарядов. Перед нами стоит задача определения векторов поля \vec{E} и \vec{B} в веществе по заданному распределению свободных токов и зарядов.

Рассмотрим с качественной стороны «механизм» образования поля в веществе. Окружающие нас тела и материальные среды в стабильном состоянии электронейтральны, а составляющие их заряды расположены таким образом, что не создают макроскопического поля. Иными словами, если нет внешних полей, то при усреднении распределения микрозарядов и микрополей мы получаем нулевые значения соответствующих величин: в диэлектриках $\rho_{св.з} = 0$ и $\vec{j}_{св.з} = 0$, в проводниках равен нулю ток свободных зарядов $\vec{j} = 0$, а общая плотность распределения свободных и связанных зарядов также равна нулю. Соответственно отсутствует макроскопическое поле, созданное зарядами вещества.

Теперь допустим существование внешних свободных зарядов ρ , \vec{j} . Они создают макроскопическое электромагнитное поле, под дей-

ствием которого перераспределяются заряды, входящие в вещество. В проводниках появляется макроскопический ток свободных зарядов, плотность зарядов в отдельных местах будет отлична от нуля. В диэлектриках за счет смещения связанных зарядов возникают отличные от нуля плотности связанных зарядов и токов. Вследствие этих изменений в состоянии вещества возникает дополнительное поле, накладывающееся на поле, созданное внешними свободными зарядами.

С помощью принципа суперпозиции (§ 2, п. 2.4) можно записать систему уравнений Максвелла (2.1) для электромагнитного поля, созданного совместными действиями свободных и связанных зарядов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \vec{j}_{\text{св.з}}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_{\text{св.з}}}{\varepsilon_0}. \end{array} \right. \quad (14.1)$$

В классической электродинамике рассматриваются только такие случаи взаимодействия зарядов и поля, при которых вещество остается в стабильном состоянии, не разрушаясь при действии на него поля. Это значит, что отдельно сохраняются и свободные, и связанные заряды:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{j}_{\text{св.з}} + \frac{\partial \rho_{\text{св.з}}}{\partial t} = 0. \end{array} \right. \quad (14.2)$$

По существу, усреднению при написании уравнений (14.1) и (14.2) подвергалось действие не только связанных, но и свободных зарядов: ведь дискретны те и другие и фиксируются при измерениях не микрополя, созданные отдельными микрочарядами, а их макроскопическое усредненное поле (\vec{E} и \vec{B}) как в случае вошедших в рассмотрение связанных, так и ранее рассматривавшихся свободных зарядов. Однако практически использовать уравнения (14.1), как это делалось в электродинамике вакуума с уравнениями Максвелла (2.1), нельзя, так как величины $\rho_{\text{св.з}}$ и $\vec{j}_{\text{св.з}}$ не могут быть непосредственно измерены или вычислены. Чтобы использовать систему уравнений (14.1), необходимо учесть вклад зарядов вещества в общее поле, опираясь на некоторые измеримые параметры, и исключить из уравнений величины $\rho_{\text{св.з}}$ и $\vec{j}_{\text{св.з}}$. А это невозможно без введения каких-то моделей строения вещества, его электромагнитных характеристик для описания поведения вещества в электромагнитном поле, т. е. включения в теорию *дополнительных* к исходным уравнениям поля положений.

В классической электродинамике используют простейшие

модели вещества. Прежде всего тела делят на диэлектрики и проводники. Мы уже охарактеризовали с качественной стороны их свойства ранее, в § 14, п. 14.1. В § 15, модели диэлектрика и проводника обсуждаются подробнее, вводятся их количественные характеристики.

14.3. Уравнения Максвелла – Лоренца для микроэлектрического поля в электронной теории. Электронная теория развилась в конце XIX века как естественное продолжение теории электромагнитного поля Максвелла. В историческом плане в теории Максвелла до определенного времени внимание сосредоточивалось на макроскопическом электромагнитном поле, а природа его источников – электрических зарядов – не рассматривалась (теория имела феноменологический характер). Открытие электрона как носителя элементарного электрического заряда (Дж. Дж. Томсон, 1897 г.) заставило физиков обратиться к изучению самих электрических зарядов, а вместе с тем и к изучению строения вещества. Первым шагом на этом пути стала классическая электронная теория вещества, основоположником которой был голландский физик Г. А. Лоренц. Его работы по электронной теории относятся к 1880–1909 гг. В теории принималось, что вещество представляет собой систему связанных между собой электронов и положительных ионов. Связь между зарядами осуществляется посредством создаваемого ими микроэлектрического электромагнитного поля в вакууме. Микроэлектрическое поле носит по отношению к макроскопическому полю первоначальный характер «истинного» поля и подчиняется уравнениям, совпадающим по форме с уравнениями Максвелла для макроскопического поля в вакууме (см. уравнения (2.1), (2.3) и др.). Движение же электронов подчиняется законам механики Ньютона.

Исходные положения классической электронной теории, как это сейчас известно, не во всех случаях применимы к микромиру, так как у микроэлектрических объектов и систем, в частности у электронов в атоме, наблюдаются новые, квантовые свойства. Ранее в нашем курсе система уравнений Максвелла – Лоренца применялась в макроскопическом случае, т. е. не к отдельному электрону, а к заряду, содержащему множество электронов. А в классической электронной теории ее применяли к микрочарядам, что, вообще говоря, неправомерно. Несмотря на это, классическая электронная теория не потеряла своего эвристического значения до настоящего времени. с качественной стороны она объясняет ряд свойств вещества и природу многих электромагнитных явлений, происходящих в веществе, позволяет установить их электронный механизм.

Строгий теоретический анализ для соответствующих вопросов выполняется в современной электронной теории, учитывающей квантовые особенности поля и движения микрочастиц. (Она изучается в курсе теоретической физики пединститута после статистической физики.)

Сейчас мы воспользуемся основными положениями электронной теории, чтобы установить вид уравнений макроскопического поля в веществе, опираясь на уравнения Максвелла для вакуума. Для этого рассмотрим микроэлектрические уравнения Максвелла – Лоренца и перейдем от них к макроскопическим уравнениям для поля в веществе. Пусть \vec{e} – вектор напряженности, а \vec{b} – индукции микроэлектрического поля, созданного его «первоначальными» источниками – электронами и соответствующими элементарными зарядами положительных ионов. Уравнения Максвелла – Лоренца для микрополя приобретают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{b} = 0, \quad (2) \quad (14.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{b} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \mu_0 q \vec{u}, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{e} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (4)$$

где \vec{u} – скорость движения заряженных частиц.

$$\text{Уравнение непрерывности записывается так: } \operatorname{div} q\vec{u} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (14.4)$$

В систему входит также уравнение движения электрона. В классической электронной теории силы Лоренца для электрона выражается той же формулой, что и для макроскопического точечного заряда, т. е. если заряд электрона q , то

$$\vec{f} = q(\vec{e} + [\vec{u} \vec{b}]). \quad (14.5)$$

Система уравнений (14.3), (14.4) и (14.5) носит название системы Максвелла – Лоренца для «истинного микрополя» при условии, что \vec{u} – скорость движения элементарных зарядов, q – плотность микрочарядов в данной точке поля, а q – величина элементарного заряда. (Полезно заметить, что никаких предположений о дискретном распределении зарядов в пространстве в классической электронной теории не делается, т. е. электрон может рассматриваться как заряженный объект малых, но конечных размеров с конечной плотностью заряда.)

14.4. Макроскопическое усреднение уравнений Максвелла – Лоренца. В классической электронной теории предполагается, что система уравнений (14.3) описывает электромагнитное поле для элементарных зарядов на любом уровне проникновения в строение вещества, в том числе и в недрах атома. Микрополе как в самих атомах и молекулах, так и в пространстве между ними очень быстро изменяется во времени, а также при переходе от одной точки пространства к другой. Причина этих изменений заключается в дискретности вещества и быстром движении элементарных частиц. В макроскопическом плане микроскопические неоднородности и колебания поля не воспринимаются. Макроскопическое поле, измеряемое приборами и влияющее на макроскопические тела, – это усредненное в пространстве и во времени, «сглаженное» микроскопическое поле.

Поэтому в макроскопической электродинамике используются некоторые средние значения величин \vec{e} и \vec{b} , q и \vec{u} . Имеется в виду, что используются значения, которые можно получить усреднением истинных, по физически малым элементам объема ΔV и промежуткам времени Δt , принимаемых в макроскопической теории за бесконечно малые dV и dt . Объемы ΔV весьма велики по сравнению с объемом атомов, а интервалы Δt – по сравнению с характерным временем (периодом) изменения микрополей.

Среднее от микроскопической величины, например \vec{e} , находится по формуле

$$\vec{e} = \frac{1}{16\Delta V\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} dt' \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} dx' \int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} dy' \int_{z-\Delta z}^{z+\Delta z} dz' \vec{e}(x', y', z', t),$$

где $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$. Оно определено в каждой точке пространства в каждый момент времени.

Если продифференцировать среднее значение по любой из переменных x , y , z , t или найти среднее от соответствующей производной, то в соответствии с предыдущей формулой видно, что получаются совпадающие результаты. Это значит, что операции усреднения и дифференцирования перестановочны.

Пользуясь перестановочностью операции усреднения и дифференцирования по координатам и времени, усредняем выражения (14.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{b} = 0, \end{array} \right. \quad (2) \quad (14.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{b} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \mu_0 \vec{q}, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{e} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{q}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Формулы (14.6) образуют в электронной теории систему уравнений для поля в веществе.

Поскольку макроскопическое поле есть усредненное микроскопическое поле, то следует определить векторы напряженности и индукции макроскопического поля равенствами

$$\vec{E} = \vec{e}, \quad \vec{B} = \vec{b}, \quad (14.7)$$

Тогда уравнения поля в веществе (14.6-1) и (14.6-2) принимают вид, тождественный уравнениям поля в вакууме:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & (1) \\ \text{div } \vec{B} = 0. & (2) \end{cases} \quad (14.8)$$

Если положить $\vec{j} = \vec{q}\vec{u}$, то уравнения (14.6-3) и (14.6-4) запишутся так:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}, & (1) \\ \text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{q}. & (2) \end{cases} \quad (14.9)$$

Для использования системы уравнений (14.8), (14.9) по схеме, аналогичной рассмотренной ранее для вакуума, нужно знать величины \vec{q} и \vec{j} . Измерить их невозможно.

В свою очередь, для конкретного расчета \vec{q} и \vec{j} в классической электронной теории не содержится необходимых сведений. Поэтому в теории должны быть привлечены дополнительные положения. Эти положения приводятся в курсе ниже и касаются электрических и магнитных свойств вещества. Они формулируются как обобщение опыта, т. е. как дополнительные к уравнениям Максвелла эмпирические соотношения.

В систему уравнений Максвелла — Лоренца, кроме уравнений (14.8), (14.9), входит еще уравнение непрерывности и уравнение движения заряженных частиц. Усредняя равенство (14.4), получаем

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \vec{q}}{\partial t}, \quad (14.10)$$

где \vec{j} и \vec{q} — средние значения плотностей для микрочастиц.

Усредненное выражение для силы Лоренца (14.5), действующей на микрочастицу, приводит к формуле, аналогичной вакуумной:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]), \quad (14.11)$$

где \vec{E} и \vec{B} — средние значения векторов, а \vec{v} — скорость движения в элементе объема ΔV , по которому ведется усреднение.

Внимательный читатель заметит, что «истинные» уравнения микрополя (14.3) усредняются чисто формально, так как ничего об изменении \vec{e} и \vec{b} во времени и пространстве неизвестно. Но для получения уравнений поля в веществе они, по существу, и не нужны. Это понятно, так как в классической электродинамике мы всегда имеем дело уже с усредненными параметрами \vec{E} , \vec{B} , \vec{q} , \vec{j} , в том числе и для вакуума; поэтому с полным основанием мы начали рассуждения в § 14, п. 14.2, выписывая сразу систему (14.1).

§ 15. Уравнения Максвелла для поля в веществе

15.1. Поляризация вещества в электрическом поле. В § 14 электромагнитное поле в веществе представлено как поле всех электри-