

Максвелла (15.22), добавляя к ней два так называемых «материальных» уравнения (15.24) и (15.26), а также третье — эмпирическое соотношение

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (15.27)$$

выражающее связь тока свободных зарядов (тока проводимости) в веществе со свойствами вещества и напряженностью поля \vec{E} . Здесь γ — удельная электрическая проводимость вещества; она не зависит от напряженности поля \vec{E} и определяется, как и ϵ , μ , экспериментально. Выражение (15.27) называется также дифференциальной формой закона Ома.

В важном частном случае стационарных полей, как это вытекает из уравнений (3) и (4) системы (15.22), напряженность магнитного поля \vec{H} и индукция электрического \vec{D} определяются только свободными зарядами точно так же, как векторы \vec{E} и \vec{B} поля в вакууме. По этой причине величины \vec{H} и \vec{D} приобретают самостоятельное значение. При расчетах рационально найти сначала эти векторы, а к величинам \vec{B} и \vec{E} переходить в случае необходимости с помощью материальных уравнений (15.24) и (15.26).

Особо подчеркнем, что система уравнений Максвелла (15.22) описывает электромагнитное поле в неподвижной среде. По этой причине изменения во времени всех величин, входящих в уравнения (\vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} , ρ , \vec{j}), рассматриваются в точке с неизменяющимися координатами, что и отражено в знаке частной производной по времени.

В уравнениях ρ — плотность свободных зарядов, не скомпенсированных связанными.

§ 16. Характерные особенности полей в веществе

16.1. Уравнения поля в потенциалах. Поля в веществе по сравнению с полями в вакууме приобретают некоторые особенности. К их выяснению в процессе применения основной системы уравнений Максвелла (15.22) для расчета полей мы и приступаем.

Для нахождения векторов поля, кроме плотности зарядов и плотности токов, должны быть заданы и величины, характеризующие свойства вещества:

$$\epsilon = \epsilon(\vec{r}), \quad \mu = \mu(\vec{r}), \quad \gamma = \gamma(\vec{r}).$$

Задача по расчету поля математически чрезвычайно сложна, и мы сначала рассмотрим частный, но в практическом и теоретическом отношении важный случай изотропного однородного вещества, непрерывно заполняющего все пространство. (Кроме того, действуют и другие ограничения, сформулированные в предыдущем параграфе.)

Для постоянных μ и ϵ систему уравнений (15.22) можно записать в

форме, удобной для сопоставления с вакуумными уравнениями (2.1) или (2.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{B} = 0, \\ \text{rot } \vec{B} = \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\mu_0 \vec{j}, \\ \text{div } \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \quad (16.1)$$

Далее при анализе и решении уравнений (16.1) мы широко используем соотношения, полученные ранее для поля в вакууме, не повторяя выкладок, если их конечный результат можно указать, опираясь на формальную аналогию между системой (16.1) и всесторонне исследованной ранее системой (2.1). Ввиду того что уравнения Максвелла для вакуума получаются из уравнений Максвелла для вещества при $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$, многие общие соотношения, полученные ранее для вакуума, справедливы для вещества при замене μ_0 на $\mu\mu_0$ и ε_0 на $\varepsilon\varepsilon_0$. Если этим правилом осмотрительно пользоваться (нужно помнить, что μ и ε — функции координат точек пространства), то ряд результатов можно взять в готовом виде.

Определим потенциалы электромагнитного поля в веществе так же, как они определены для вакуума, т. е. формулами (4.1) и (4.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \end{array} \right. \quad (16.2)$$

В таком случае уравнения (16.1) приводятся к потенциалам совершенно аналогично уравнениям (2.1). Не повторяя выкладки, проделанной в § 4, п. 4.2, пишем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 \vec{j}, \\ \Delta \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \end{array} \right. \quad (16.3)$$

Условие Лоренца для калибровки потенциалов приобретает вид

$$\text{div } \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (16.4)$$

Далее нахождение потенциалов поля, созданного системой заря-

дов, ничем не отличается от рассмотренного ранее случая вакуума (§ 5). В результате имеем

$$\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{j} \left(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c/\sqrt{\varepsilon\mu}} \right)}{r'} dV_0, \quad (16.5)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_{V_0} \frac{e \left(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c/\sqrt{\varepsilon\mu}} \right)}{r'} dV_0.$$

Потенциалы изменились в однородном веществе по сравнению с полем в пустоте кратно $\frac{1}{\varepsilon}$ и μ ; изменяются также векторы поля \vec{E} и \vec{B} , а скорость распространения возмущений становится равной c' :

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (16.6)$$

Кроме вещественной непрерывной среды, часто приходится рассматривать отдельные тела конечных размеров или их системы, находящиеся в поле и отделенные от пустоты, вещественной среды, или друг от друга границами раздела.

Если заряды в вакууме в изученной ранее макроскопической теории считались распределенными непрерывно (кроме точечных), то при наличии тел такая непрерывность нарушается: имеют место заряды на поверхностях, являющихся границами тел или границами раздела между областями с различными значениями параметров μ , ε , ν . Это значит, что приходится вводить и рассматривать поверхностные плотности зарядов и токов. В некоторых случаях имеются линейные проводник, нити из диэлектрика, поэтому приходится рассматривать линейные плотности. Соответствующие величины мы будем обозначать либо особыми буквами, либо теми же буквами, что и объемные плотности, но снабжать их поясняющими индексами:

$$\sigma = \varrho_{\text{пов}} = \frac{dQ}{dS}, \quad \vec{j}_{\text{пов}} = \varrho_{\text{пов}} \vec{v}.$$

(Во второй формуле вектор скорости движения физически бесконечно малого заряда касателен к поверхности, на которой находится заряд.)

$$\tau = \varrho_{\text{лин}} = \frac{dQ}{dl}, \quad \vec{j}_{\text{лин}} = \varrho_{\text{лин}} \vec{v}.$$

(В формуле для $\vec{j}_{\text{лин}}$ вектор скорости касателен к заданной линии.)
Поскольку общие формулы для потенциалов поля в непрерывной

среде (16.5) учитывают только объемные заряды, то при наличии заряженных поверхностей и линий в пространстве в них следует добавить слагаемые вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A} = \mu f \int_{S_0} \frac{\vec{j}_{\text{пов}} \left(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c/\sqrt{\epsilon\mu}} \right)}{r'} dS_0, \\ \varphi = \frac{k}{\epsilon} \int_{S_0} \frac{\rho_{\text{пов}} \left(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c/\sqrt{\epsilon\mu}} \right)}{r'} dS_0, \end{array} \right. \quad (16.7)$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A} = \mu f \int_{L_0} \frac{\vec{j}_{\text{лин}} \left(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c/\sqrt{\epsilon\mu}} \right)}{r'} dl_0, \\ \varphi = \frac{k}{\epsilon} \int_{L_0} \frac{\rho_{\text{лин}} \left(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c/\sqrt{\epsilon\mu}} \right)}{r'} dl_0. \end{array} \right. \quad (16.8)$$

Соответствующие члены должны быть учтены в формулах для напряженности и индукции поля, а также в ряде других соотношений

Кроме этого, надо иметь в виду, что наличие тел и сплошных сред, отделенных друг от друга границами, порождает много задач, применение к которым известных общих уравнений поля в потенциалах (16.5), (16.7) и (16.8) либо невозможно, либо неэффективно. В конкретных случаях часто приходится обращаться к исходным уравнениям поля (15.22) или к уравнениям в потенциалах (16.3), записывая и решая их совместно для нескольких областей пространства при разнообразных граничных условиях.

16.2. Граничные условия. Общее решение уравнений поля при наличии вещества содержит некоторые произвольные функции. Эти функции при переходе к частным решениям исключаются при помощи заданных начальных и граничных условий. В случае системы зарядов в вакууме граничные условия фактически сводились к достаточно быстрой убыли векторов и потенциалов поля на бесконечном расстоянии от системы. При наличии вещественных тел помимо этого необходимо учитывать пространственные границы тел, на которых параметры поля имеют заданное значение. (Например, потенциал поверхности проводника постоянен во всех его точках, напряженность электрического поля перпендикулярна к поверхности проводника и т. д.)

Граничные условия теперь весьма разнообразны и существенно влияют на распределение поля в пространстве. Как мы увидим далее на примерах, может быть поставлен вопрос о расчете поля в ограни-

ченной области пространства около системы зарядов. В таком случае поле на границе должно быть задано, тогда в остальных точках оно определяется с помощью решения уравнений Максвелла.

Такова одна особенность поля в веществе, состоящая в наличии границ и необходимости задания граничных условий на конечных расстояниях от зарядов. Другая особенность поля, обусловленная границами раздела вещественных сред, состоит в поведении векторов поля на границах раздела двух сред с разными значениями их электромагнитных параметров. На границе раздела двух веществ величины ϵ , μ , γ изменяются скачком, т. е. функции $\epsilon(\vec{r})$, $\mu(\vec{r})$, $\gamma(\vec{r})$ терпят конечный разрыв. Соответственно скачком изменяются и векторы поля \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} . Очевидно, что для описания поля необходимо знать поведение векторов поля на таких границах. Это важная новая задача электродинамики. Изменение полевых величин \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} на поверхности раздела двух материальных сред описывается равенствами, носящими название граничных условий.

Уравнения Максвелла дают возможность для всех векторов поля установить граничные условия, если прибегнуть к следующему приему. Пусть S – поверхность, являющаяся границей раздела двух сред с проницаемостями μ_1 , ϵ_1 и μ_2 , ϵ_2 и проводимостями γ_1 и γ_2 . Окружим границу раздела двумя поверхностями, выделяющими тонкий слой (рис. 16.1). Считая, что параметры среды и поле изменяются не на самой границе, а в этом слое, причем изменяются непрерывно, применим к слою уравнения Максвелла. Затем устремим толщину слоя к нулю и получим граничные условия.

Найдем граничные условия для векторов поля \vec{B} и \vec{D} , входящих в систему (15.22) под знаком дивергенции. На рисунке 16.2 около границы раздела выделен малый цилиндр высотой h . Интегрируя по объему цилиндра последнее уравнение системы, получим

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = Q,$$

где Q – заряд, находящийся внутри цилиндра. Преобразуем интеграл по теореме Гаусса, причем выделим интегрирование по основаниям и боковой поверхности:

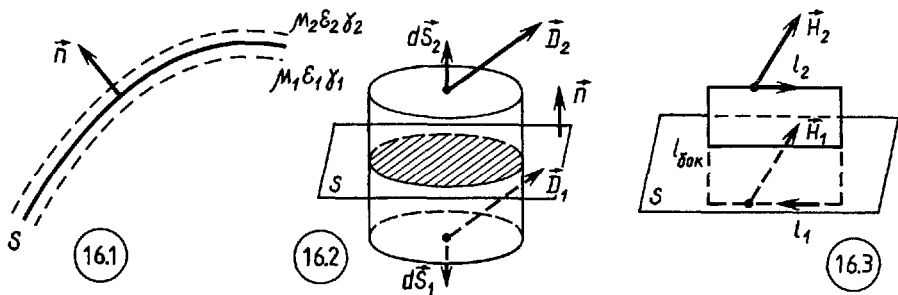
$$\int_{S_1} \vec{D} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D} d\vec{S} + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{D} d\vec{S} = Q.$$

Учитывая, что S_1 и S_2 – малые равные величины, и применяя теорему о среднем, получаем

$$D_{2n}S - D_{1n}S + \langle D_{\text{бок}} \rangle 2\pi rh = Q.$$

Осталось устремить высоту цилиндра к нулю. Получается

$$D_{2n} - D_{1n} = \frac{Q}{S}, \text{ или } D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (16.9)$$



Таким образом, нормальная составляющая электрической индукции терпит разрыв на границе раздела, если только эта граница заряжена. Что касается нормальной составляющей электрической напряженности, то, пользуясь (15.26), имеем

$$\epsilon_2 \epsilon_0 E_{2n} - \epsilon_1 \epsilon_0 E_{1n} = \sigma. \quad (16.10)$$

Напряженность терпит разрыв и на незаряженной поверхности:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (16.11)$$

Переходим к магнитной составляющей поля. Так как $\text{div } \vec{B} = 0$, то сразу имеем

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad (16.12)$$

откуда следует

$$\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (16.13)$$

Формулы (16.9), (16.11), (16.12) и (16.13) выражают граничные условия для нормальных составляющих векторов поля на границе раздела двух сред. Полезно заметить, что номера сред согласованы с направлением нормали: *нормаль идет от границы во вторую среду.*

Выведем далее граничные условия для тангенциальных составляющих, для чего выделим величины, входящие в уравнения Максвелла под знаком ротора. Выберем малый плоский контур L , пересекающий границу раздела двух сред (рис. 16.3), и проинтегрируем третье уравнение из системы (15.22) по площадке S , ограниченной этим контуром:

$$\int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} + \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Преобразуем интеграл в левой части равенства по теореме Стокса, а к первому интегралу в правой части применим теорему о среднем:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + \left\langle \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\rangle \vec{S}.$$

Здесь I — полный ток через площадку. Выделим интегрирование по отдельным отрезкам контура и воспользуемся их малостью:

$$-H_{1t}l + H_{2t}l + 2 \langle H_{\text{бок}} \rangle l_{\text{бок}} = I + \left\langle \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\rangle \vec{S}.$$

Устремляя теперь $l_{\text{бок}}$ к нулю, приходим к искомому соотношению

$$H_{2t} - H_{1t} = \frac{I}{l} = j_{\text{пов}}. \quad (16.14)$$

Таким образом, тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля терпит разрыв при условии, что по поверхности раздела течет ток. Очевидно, что терпит разрыв и тангенциальная составляющая магнитной индукции:

$$\frac{B_{2t}}{\mu_2 \mu_0} - \frac{B_{1t}}{\mu_1 \mu_0} = j_{\text{пов}}, \quad (16.15)$$

но этот разрыв сохраняется и в случае отсутствия тока; при $j_{\text{пов}} = 0$

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (16.16)$$

Обратим внимание на то, что теперь номера сред согласованы с выбором положительного направления касательной к сечению; во второй среде оно совпадает с направлением обхода контура.

Если исходить из последнего уравнения системы Максвелла, то рассуждения полностью повторяются, и для тангенциальной составляющей вектора \vec{E} получаем соотношение

$$E_{2t} - E_{1t} = 0. \quad (16.17)$$

Она непрерывна, тогда как для электрической индукции в соответствии с формулой (15.26) имеем разрыв непрерывности, причем

$$\frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (16.18)$$

Выведем также граничные условия для плотности тока при переходе через границу двух проводящих сред. Поскольку $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, то для тангенциальной составляющей на основе формулы (16.17) имеем

$$\frac{j_{1t}}{j_{2t}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (16.19)$$

Граничное условие для нормальной составляющей выводится из закона сохранения заряда:

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Далее выкладка аналогична примененной при выводе формулы (16.9). Окончательный результат таков:

$$j_{2n} - j_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (16.20)$$

т. е. плотность тока испытывает разрыв при условии увеличения или уменьшения заряда на поверхности раздела.

Для удобства использования поместим систему основных граничных условий в таблицу 1.

Таблица 1

Система граничных условий

	Нормальная составляющая		Тангенциальная составляющая	
Электрическое поле	Напряженность $\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$	Индукция $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$	Напряженность $E_{2t} - E_{1t} = 0$	Индукция $\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$
Магнитное поле	$\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$	$B_{2n} - B_{1n} = 0$	$H_{2t} - H_{1t} = J_{пов}$	$\frac{B_{2t}}{\mu_2} - \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \mu_0 J_{пов}$
Плотность тока	$J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$		$\frac{J_{2t}}{J_{1t}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$	

Найденные соотношения, которым удовлетворяют векторы поля и плотность тока на границе раздела сред, являются очень важными: они широко используются в конкретных случаях отыскания полей, распределения зарядов и токов на проводниках и диэлектриках при наличии поля. Это очень общие заключения, сделанные нами относительно поля при наличии вещества с помощью уравнений Максвелла.

Как уже отмечалось выше, с введением в систему поле-заряды вещества возникает целый ряд новых задач на расчет полей и распределение зарядов, так как появляются границы тел и сред с различными значениями μ , ε , γ . Так, в стационарных полях приходится рассматривать системы тел — проводников и диэлектриков, что составляет предмет электростатики. Отдельно в проводниках изучается постоянный и переменный ток и т. д. Наконец, требуется

исследовать поведение электромагнитных волн на границе раздела двух сред (например, теоретические основы законов отражения и преломления света). Эти и подобные им вопросы рассматриваются в последующих темах курса с применением формул граничных условий.

16.3. Энергия и импульс поля в веществе. Среди общих вопросов, которые следует выяснить заново, очень важна задача об энергии и импульсе электромагнитного поля. Для поля в веществе можно повторить выкладку, выполненную для вакуума в § 3, п. 3.2, опираясь на уравнения Максвелла (15.22). Умножая первое из них скалярно на \vec{H} , а третье — на \vec{E} , с помощью использованных ранее приемов приходим к равенству

$$-\frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) = \text{div} [\vec{E} \vec{H}] + \vec{j} \vec{E}. \quad (16.21)$$

Заметим, что с использованием векторов \vec{H} и \vec{D} для вакуума уравнение (3.4) имеет такой же вид, как и уравнение (16.21). Так что все последующие соотношения можно выписывать сразу, не повторяя рассуждений, а лишь заменяя в формулах § 3 $\frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ на \vec{H} и $\epsilon_0 \vec{E}$ на \vec{D} .

Формула (16.21) выражает закон изменения энергии электромагнитного поля в веществе и дает основание для введения плотности энергии поля:

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) \quad (16.22)$$

и плотности потока энергии:

$$\vec{\sigma} = [\vec{E} \vec{H}]. \quad (16.23)$$

Полученные формулы имеют общий смысл, так как при их выводе никаких дополнительных ограничений на поле и среду не накладывалось. Они справедливы для неподвижной непрерывной неоднородной среды. Однако в толковании закона изменения энергии электромагнитного поля в веществе (16.21) в сравнении с вакуумом имеются некоторые особенности. Во-первых, вещество по ранее поставленному условию неподвижно; следовательно, работа поля $\vec{j} \vec{E}$, совершаемая при перемещении зарядов, относится к зарядам, движущимся в проводниках. Но в таком случае с помощью уравнения (15.27) имеем:

$$\vec{j} \vec{E} = \frac{j^2}{\gamma}. \quad (16.24)$$

Эта работа идет на повышение внутренней энергии тел в системе, т. е. мы приходим к закону Джоуля — Ленца (в дифференциальной форме): теплота \vec{Q} , выделяемая при движении зарядов в проводнике в единице объема за 1 с, определяется формулой

$$\tilde{Q} = \frac{I^2}{\gamma}. \quad (16.24-a)$$

Таким образом, последнее слагаемое в (16.21) выражает теплоту, выделяемую в системе за счет убыли энергии поля.

Формула (16.21) справедлива и для случая кусочно-непрерывной среды, т. е. при наличии конечных разрывов непрерывности параметров μ и ϵ . В частности, в пространстве могут иметь место участки, не заполненные веществом. Для них слагаемое $\vec{j} \vec{E}$ имеет прежний «вакуумный» смысл. Это работа поля по повышению кинетической энергии свободных зарядов.

Вторая особенность применения формулы (16.21) состоит в том, что в веществе поле может иметь границы, через когорые поток энергии не проходит. В таком случае закон сохранения энергии в изолированной системе (3.10) имеет место не только для бесконечно больших, но и *конечных* областей пространства, в которых «заперто» электромагнитное поле:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) dV = \int_V j^2_{\gamma} dV. \quad (16.25)$$

В заключение несколько слов об импульсе электромагнитного поля. При тех же допущениях о неподвижности вещества по аналогии с формулой (3.17) имеем выражение для плотности импульса:

$$\vec{g} = [\vec{D} \vec{B}]. \quad (16.26)$$

Но вопрос об импульсе электромагнитного поля в веществе в классической электродинамике решается неоднозначно, о чем будет сказано ниже, в § 23.

Методические указания и рекомендации

I. Уравнения электромагнитного поля для вещества (15.22) вместе с материальными уравнениями (15.24), (15.26), (15.27) являются теоретическим обобщением эмпирических законов электромагнетизма, выполненным Д. К. Максвеллом в 1860–1865 гг. Именно уравнения поля в веществе послужили основой электродинамики в процессе ее исторического развития и становления. К уравнениям поля в вакууме ((2.1), (2.3) и др.) можно, вообще говоря, перейти как к частному случаю уравнений системы (15.22), полагая $\mu = 1$ и $\epsilon = 1$.

Таким образом, в смысле математической общности уравнения Максвелла для вещества шире, чем исходные для нашего курса уравнения Максвелла для вакуума, так как последние содержатся в первых для частного случая среды с единичными значениями проницаемостей. Поэтому большинство курсов электродинамики основывается на уравнениях Максвелла для вещества. Однако фундаментальный характер имеют все же не они, а уравнения поля в вакууме, которые имеют обширнейшую область применения, простирающуюся от границ самых больших изученных расстояний во Вселен-