лах, пользуясь аналогией со случаем поля в вакууме. Найдите качественно механизмы, приводящие к ослаблению электрического поля некоторой системы зарядов в веществе и к усилению магнитного поля. Запишите формулы граничных условий, изменяя нумерацию сред. Как это повлияет на взаимосвязь определяющих формулы направлений? Выполните целиком вывод закона изменения и сохранения энергии поля в веществе.

Глава VI
ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Мы приступаем к обсуждению частных проблем электродинамики поля в веществе. Их классификация связана с соответствующими частными случаями электромагнитных полей; изучаются стационарные и квазистационарные поля, электромагнитные волны в веществе. Наличие вещества и особенно свободных зарядов в веществе приводит к значительным отличиям электромагнитных полей и методов их расчета от изученных ранее. Важнейшее новое явление в веществе — возникновение электрического тока, порождаемого электрическим полем. В свою очередь ток вызывает магнитное поле, а изменения последнего — явление электромагнитной индукции.

В данной главе изложены основные вопросы электростатики — учения о статическом электромагнитном поле в системе заряженных и нейтральных диэлектрических и проводящих тел. При этом введенные ранее в главе II для стационарного поля в вакууме формулы, соотношения, величины используются как известные.

§ 17. Электростатика диэлектриков

17.1. Электростатическое поле в однородном диэлектрике. Допустим существование однородной среды из диэлектрика, заполняющего пространство. (Такой средой, в частности, является воздух.) В диэлектриках могут иметь место различные конфигурации свободных зарядов, описываемые плотностью $\varrho(\vec{r})$.

В статическом случае векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ не зависят от времени, а заряды, создавшие поле, неподвижны (токов нет, так как по диэлектрику заряды не перемещаются). Система уравнений Максвелла (15.22) распадается на две независимые подсистемы:

$$\operatorname{rot}\vec{E}=0,\ \operatorname{div}\vec{D}=\varrho,\ \vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \tag{17.1}$$

и

$$\operatorname{rot}\vec{H}=0,\ \operatorname{div}\vec{B}=0,\ \vec{B}=\mu\mu_0\vec{H}. \tag{17.2}$$

Это значит, что в данном случае может быть одно электростатическое поле, описывающееся уравнениями (17.1), из которых основным является второе –

$$\operatorname{div}\vec{D}=\varrho. \tag{17.3}$$

В интегральной форме оно имеет вид теоремы Гаусса для поля в веществе:

$$\oint \vec{D}d\vec{S}=Q. \tag{17.4}$$

Уравнения (17.3) и (17.4) только постоянным множителем ε отличаются от соответствующих вакуумных. Поэтому все выводы § 6 о свойствах стационарного поля в вакууме остаются в силе и для однородного диэлектрика. Только везде, где в формулу электростатического поля в вакууме входят постоянные ε_0 или k, необходимо произвести замену: ε_0 на $\varepsilon\varepsilon_0$ и k на $\frac{k}{\varepsilon}$. Так, например, для потенциала и напряженности поля точечного заряда на основании формул (6.11) и (6.10) имеем

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r}=\frac{kq}{\varepsilon r}; \tag{17.5}$$

$$\vec{E}=\frac{kq}{\varepsilon r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{17.6}$$

В этом случае имеется готовое решение для потенциала поля, созданного ограниченной по размерам системой зарядов:

$$\varphi(\vec{r})=\frac{k}{\varepsilon}\int\limits_{V_0}\frac{\varrho(\vec{r}_0)}{r'}dV_0+\frac{k}{\varepsilon}\int\limits_{S_0}\frac{\sigma(\vec{r}_0)}{r'}dS_0+\frac{k}{\varepsilon}\int\limits_{L_0}\frac{\tau(\vec{r}_0)}{r'}dl_0. \tag{17.7}$$

Это выражение учитывает все возможные виды распределения зарядов в диэлектрике.

Повторяются для однородной среды формулы потенциала и напряженности в дипольном приближении и т. д.

Остановимся на законе Кулона (2.15) и формуле для энергии электростатического поля (7.15). Закон Кулона для взаимодействия двух зарядов в однородной среде имеет вид

$$\vec{F}_{1,2}=\frac{k}{\varepsilon}\frac{q_1q_2}{r_{1,2}^2}\frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}}, \tag{17.8}$$

т. е. сила взаимодействия точечных зарядов в диэлектрике уменьшается в ε раз (во столько раз, какова диэлектрическая проницаемость среды).

Формула для плотности энергии

$$W_{эл}=\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}=\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0E^2 \tag{17.9}$$

свидетельствует об увеличении энергии в ε раз при заданной напряженности. Очевидно, что для создания поля напряженностью $\vec{E}$ в веществе требуется иная система зарядов, нежели для такого же поля в вакууме. Если же рассмотреть некоторую заданную систему, то энергия ее согласно (7.11) подсчитывается по формуле

$$W = \frac{k}{2\varepsilon} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \tag{17.10}$$

т. е. уменьшается в веществе в ε раз.

Рассмотренные случаи полей показывают, что вместо вектора $\vec{E}$ при наличии среды удобнее использовать вектор индукции электрического поля $\vec{D}$. Поле вектора $\vec{D}$ определяется только свободными зарядами, и среду в процессе расчета учитывать не нужно. Искомая напряженность $\vec{E}$ вычисляется на последнем этапе по материальному уравнению (17.1).

Особенно наглядна роль вектора $\vec{D}$ для неоднородной, но непрерывной среды. При расчете $\vec{D}$ используется уравнение (17.3), или формула (17.4), или, наконец, возможен переход к уравнению для потенциала

$$\Delta\varphi_D = -\varrho, \tag{17.11}$$

где

$$-\operatorname{grad}\varphi_D = \vec{D}, \tag{17.12}$$

что исключает из рассмотрения $\varepsilon(\vec{r})$, упрощая уравнения для напряженности $\vec{E}$. Окончательный результат получается с помощью формул (17.1):

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Пример 17.1. **Расчет поля в случае неоднородной среды.**

Найдем напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом в диэлектрической среде. Проницаемость среды уменьшается при удалении от заряда по формуле

$$\varepsilon = a e^{-\frac{r}{R}},$$

где a и R — постоянные величины.

Для индукции $\vec{D}$ имеем согласно выражению (17.1) уравнение

$$\operatorname{div}\vec{D} = q\delta(\vec{r}),$$

которое можно решить с помощью теоремы Гаусса или переходя к потенциалу. Изберем для полноты иллюстрации второй путь. У нас

$$\Delta\varphi_D = -q\,\delta(\vec{r}).$$

Решение такого уравнения находили ранее:

$$\varphi_D = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r}.$$

Переходим к индукции: $\vec{D} = -\mathrm{grad}\,\varphi_D = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$.

Наконец, находим напряженность:

$$\vec{E} = ke^{\frac{r}{R}}\frac{q}{ar^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Но все эти выводы, по существу, носят тривиальный характер и мало что прибавляют к анализу поля, проделанному ранее для вакуума. Иное положение, когда диэлектрическая среда кусочно-неоднородна: имеют место границы, отделяющие один диэлектрик от другого, границы между веществом и вакуумом, проводящими телами и диэлектрической средой и т. д. В таких случаях задачи электростатики диэлектриков приобретают самостоятельное значение.

17.2. Электростатическое поле при наличии границ раздела в среде и разрывов непрерывности плотности зарядов. Основная задача электростатики – рассчитать поле системы заряженных и нейтральных тел. В этом случае имеют место конечные разрывы непрерывности функций $\varepsilon(\vec{r})$ и $\varrho(\vec{r})$ на границах раздела вещественных сред, соответственно терпят разрыв векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$.

Как указывалось, основным уравнением электростатики является уравнение (17.3). Запишем его через потенциал согласно формулам (17.11) и (17.12) для каждой области:

$$\Delta\varphi_D = -\varrho. \tag{17.13}$$

(В пределах каждой области ε обычно постоянно, так что можно пользоваться введенным ранее потенциалом – определение (16.2):

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi\, -$$

и решать уравнения Пуассона вида

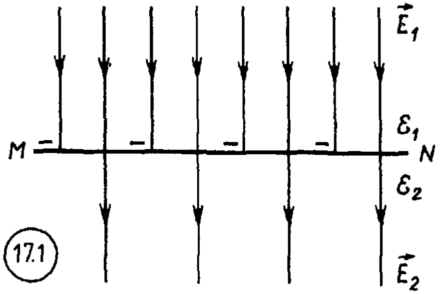
$$\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

т. е. решать задачу сразу для $\vec{E}$, минуя $\vec{D}$.)

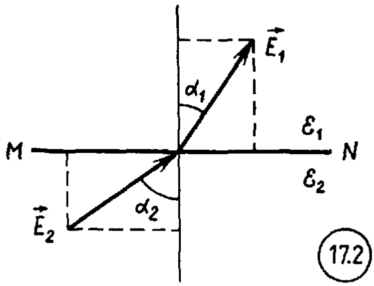
Уравнения (17.13) решаются для каждой области. Найденные для всех областей решения «сшиваются» с помощью граничных условий. Сообщаем, что потенциал непрерывен во всем пространстве, в том числе и на границах раздела двух сред; это необходимо для однозначного определения векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$. (Исключение представляют так называемые двойные электрические слои, которые мы не рассматриваем.) Что касается граничных условий для $\vec{D}$ и $\vec{E}$, то они изучены ранее (см. табл. 1).

Таковы постановка и основной путь решения многих задач электростатики, причем в систему тел могут входить не только тела из диэлектрика, но и из проводника. (Особенности поля в проводнике рассматриваются ниже.)

Из уравнений (17.13) следует, что для нахождения потенциала



17.1



17.2

поля в веществе нужно знать лишь конфигурацию системы свободных зарядов. Но можно установить и распределение связанных зарядов в диэлектрике после определения поля в нем. Для этого следует пользоваться формулами (15.7) и (15.21)

$$\varrho_{\text{св. з}} = -\operatorname{div}\vec{P},\ \ \vec{P} = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0\vec{E}.$$

Эти формулы не позволяют найти поверхностную плотность связанных зарядов на границах раздела диэлектриков. Для нахождения последней можно использовать граничные условия для вектора $\vec{P}$. При этом полностью повторится вывод граничного условия для нормальной составляющей вектора $\vec{D}$ в § 16, п. 16.2. Окончательный результат будет таков:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_{\text{св. з}}, \tag{17.14}$$

что и завершает вопрос о распределении связанных зарядов.

Пример 17.2. **Электростатическое поле на границе раздела двух однородных диэлектриков.**

С помощью формул (16.9) и (16.17) имеем

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma,\ \ E_{2t} - E_{1t} = 0.$$

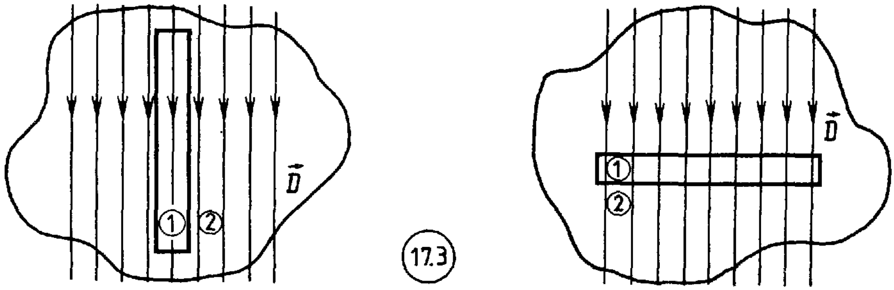
Нормальная составляющая напряженности электрического поля терпит разрыв. Что касается тангенциальной составляющей, то она непрерывна. Рассмотрим незаряженную поверхность. Проводя линии напряженности поля с густотой, пропорциональной модулю $\vec{E}$, замечаем, что число линий, перпендикулярных к границе, изменяется в отношении $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$. Очевидно, что это объясняется возникновением поверхностного связанного заряда (рис. 17.1). Учитывая поведение обеих составляющих вектора $\vec{E}$ на незаряженной поверхности, замечаем, что линии напряженности преломляются согласно соотношению (рис. 17.2)

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Пример 17.3. **Измерение векторов электростатического поля в веществе.**

В однородной протяженной диэлектрической среде создано электростатическое поле. Прорежем узкую длинную щель вдоль силовых линий (рис. 17.3). В таком случае с помощью граничного условия (16 17) заключаем, что

$$E_2 = E_1,$$



17.3

т. е. напряженность поля в этой щели равна напряженности в диэлектрике, чем и можно воспользоваться для непосредственного ее измерения.

Если щель прорезана перпендикулярно линиям поля, то по формуле (16.9) имеем

$$D_2 = D_1.$$

Щель заполнена воздухом, для которого $\varepsilon \approx 1$, поэтому $D_2 = \varepsilon_0 E_2$. Отсюда

$$D_1 = \varepsilon_0 E_2.$$

Поскольку измерения характеристик поля основаны на его силовом действии, а в выражение электрической составляющей силы Лоренца входит напряженность, то $\vec{E}_2$ может быть непосредственно измерена, а вместе с ней определена и индукция поля в веществе.

Пример 17.4. **Влияние поляризации вещества на напряженность поля.**

Возьмем плоскопараллельную пластинку и расположим перпендикулярно вектору $\vec{D}$ электростатического поля. Вследствие поляризации на пластинке возникают поверхностные связанные заряды, создающие дополнительное поле. Пользуясь граничным условием (16.9), записываем $\varepsilon_0 \vec{E}_2 = \vec{D}$ (рис. 17.4). Отсюда следует, что $\vec{E}_1 = \dfrac{\vec{E}_2}{\varepsilon}$ – поле внутри пластинки ослабло в ε раз. Если воспользоваться еще формулой (15.21), которая запишется для пластинки в виде

$$\varepsilon_0 \vec{E}_2 = \varepsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P},$$

то имеем

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда видно, как связано уменьшение поля в веществе с вектором поляризации.

Пример 17.5. **Расчет поля в диэлектрике с границей раздела.**

Пусть шар радиусом a из однородного диэлектрика с проницаемостью ε_1 заряжен с постоянной плотностью ϱ. Он находится в однородной диэлектрической среде с проницаемостью ε_2. Требуется найти поле во всем пространстве.

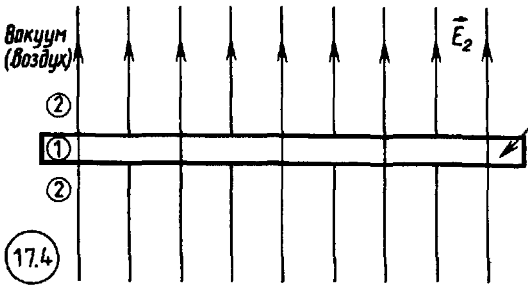
Решим задачу, записывая исходные уравнения поля для обеих сред в потенциалах (см. (17.13)):

$$\Delta\varphi_1 = -\varrho,$$
$$\Delta\varphi_2 = 0.$$

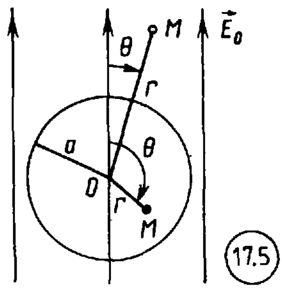
Далее можно использовать решения аналогичных уравнений, найденные в примере 6.2:

$$\varphi_1 = -\frac{\varrho r^2}{6},$$

$$\varphi_2 = -\frac{A_2}{r} + B_2.$$



17.4



17.5

Постоянные интегрирования A_2 и B_2 определяем, используя условие непрерывности потенциала и его производной на границе раздела:

$$A_2 = -\frac{\varrho a^3}{3}, \qquad B_2 = -\frac{\varrho a^2}{2}.$$

Переходя к индукции поля, получаем

$$\vec{D}_1 = \frac{\varrho r}{3} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q_r}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

$$\vec{D}_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

где $Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \varrho$ — заряд всего шара, а $Q_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho$ — заряд внутри шара радиусом r.

Индукция непрерывна на границе раздела двух диэлектриков. Находя напряженность поля, имеем

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} \frac{Q_r}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Ее нормальная составляющая при $r = a$ терпит разрыв, соответствующий граничному условию:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Пример 17.6. **Расчет поля при наличии диэлектрических тел.**

Шар радиусом a из однородного диэлектрика с проницаемостью ε внесен в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}_0$. Требуется найти поле после внесения шара. (Поле изменилось вследствие поляризации шара.)

Задачу решаем с помощью уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$, так как свободных зарядов нет. Выберем сферическую систему координат, а ось Oz направим по вектору $\vec{E}_0$ (рис. 17.5). В сферических координатах уравнение приводится к виду

$$r^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) = 0. \qquad (1)$$

(Учтено, что вследствие осевой симметрии условий задачи потенциал от азимутального угла α не зависит.) Ищем решение уравнения по методу разделения переменных:

$$\varphi(r, \vartheta) = R(r)\,T(\vartheta). \qquad (2)$$

После подстановки (2) в уравнение (1) получаем два уравнения

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - \lambda R = 0; \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{dT}{d\vartheta}\right) + \lambda T = 0, \tag{4}$$

где λ – параметр разделения переменных. Подстановкой убеждаемся, что функция

$$T = \cos\vartheta \tag{5}$$

служит решением уравнения (4) при значении параметра $\lambda = 2$. Уравнение (3) принимает вид

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - 2R = 0. \tag{6}$$

Используя подстановку $r = e^z$, переводим уравнение (6) в обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2R}{dz^2} + \frac{dR}{dz} - 2R = 0. \tag{7}$$

Находим общий интеграл уравнения (7) в виде $R = C_1 e^z + C_2 e^{-2z}$ или, возвращаясь к переменной r, в виде $R = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}$

Окончательно решение уравнения (1) записываем в виде

$$\varphi = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r^2}\right)\cos\vartheta. \tag{8}$$

Константы C_1 и C_2 следует определить, пользуясь граничными условиями. Для внешней области (2) вдали от шара поле остается однородным, так что

$$\vec{E}_2|_{r\to\infty} = \vec{E}_0,$$

откуда

$$\varphi_2|_{r\to\infty} = -\vec{E}_0\vec{r} = -\vec{E}_0 r\cos\vartheta,$$
$$C_1 = E_0.$$

Формула для потенциала вне шара принимает вид

$$\varphi_2 = \left(-E_0 r + \frac{\alpha}{r^2}\right)\cos\vartheta, \tag{9}$$

где α – константа, введенная вместо C_2.

Внутри шара потенциал должен быть конечной величиной, т. е. $C_2 = 0$. Поэтому

$$\varphi_1 = \beta\vec{E}_0\vec{r} = \beta E_0 r\cos\vartheta, \tag{10}$$

где $\beta = \frac{C_1}{E_0}$ введено ради удобства выкладки.

Используя теперь условие непрерывности потенциала на границе двух сред при $r = a$ и граничное условие (16.11) для напряженности поля, имеем

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a),$$

$$\varepsilon \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=a},$$

или подробно:

$$\beta E_0 a = -E_0 a + \frac{\alpha}{a^2}; \tag{11}$$

$$\varepsilon\beta E_0 = -E_0 - \frac{2\alpha}{a^3} \qquad (12)$$

Решая алгебраическую систему (11)–(12), получаем значения α и β.

$$\alpha = a^3 E_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}, \quad \beta = -\frac{3}{\varepsilon + 2},$$

после чего можем записать потенциал поля в окончательной форме:

$$\varphi_1 = -\frac{3}{\varepsilon + 2} E_0 r \cos \vartheta; \qquad (13)$$

$$\varphi_2 = E_0 \left(-r + \frac{a^3}{r^2} \, \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) \cos \vartheta. \qquad (14)$$

Найденные потенциалы φ_1 и φ_2 дают ответ на поставленную задачу — по ним определяется напряженность поля:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad E_\vartheta = -\frac{1}{r} \, \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}.$$

(Вычисления напряженностей мы предоставляем читателю.)

Весьма интересно придать потенциалам (13) и (14) иную форму, вводя в рассмотрение вектор

$$\vec{P} = \frac{3}{4\pi} \, \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0,$$

оказывающийся вектором поляризации шара в данном случае. После подстановки получаем

$$\varphi_1 = -\vec{E}_0 \vec{r} + \frac{4\pi r^3}{3} \, \frac{\vec{P} \vec{r}}{r^3},$$

$$\varphi_2 = -\vec{E}_0 \vec{r} + \frac{4\pi a^3}{3} \, \frac{\vec{P} \vec{r}}{r^3}$$

Но эти формулы в явном виде представляют поле как суперпозицию исходного поля $\vec{E}_0$ и поля однородного поляризованного шара с дипольным моментом $\vec{P}V$ (внутри шара берется $V' = \dfrac{4\pi r^3}{3}$).

Можно найти и плотность связанных зарядов на поверхности шара, если воспользоваться формулой (17.14). Поскольку

$$E_r = E \cos \vartheta,$$

то

$$\sigma_{\text{св з}} = \frac{3}{4\pi} \, \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 \cos \vartheta.$$

§ 18. Проводники в электростатическом поле

18.1. Уединенный проводник. Электроемкость. Еще из школьного курса физики известно, что проводник, помещенный в электростатическое поле, заряжается по поверхности. В отсутствии поля