$$\varepsilon\beta E_0 = -E_0 - \frac{2\alpha}{a^3} \tag{12}$$

Решая алгебраическую систему (11) – (12), получаем значения α и β.

$$\alpha = a^3 E_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}, \quad \beta = -\frac{3}{\varepsilon + 2},$$

после чего можем записать потенциал поля в окончательной форме:

$$\varphi_1 = -\frac{3}{\varepsilon + 2} E_0 r \cos\vartheta; \tag{13}$$

$$\varphi_2 = E_0 \left(-r + \frac{a^3}{r^2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\right) \cos\vartheta. \tag{14}$$

Найденные потенциалы φ_1 и φ_2 дают ответ на поставленную задачу – по ним определяется напряженность поля:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad E_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}.$$

(Вычисления напряженностей мы предоставляем читателю.)

Весьма интересно придать потенциалам (13) и (14) иную форму, вводя в рассмотрение вектор

$$\vec{P} = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\vec{E}_0,$$

оказывающийся вектором поляризации шара в данном случае. После подстановки получаем

$$\varphi_1 = -\vec{E}_0\vec{r} + \frac{4\pi r^3}{3}\frac{\vec{P}\vec{r}}{r^3},$$

$$\varphi_2 = -\vec{E}_0\vec{r} + \frac{4\pi a^3}{3}\frac{\vec{P}\vec{r}}{r^3}$$

Но эти формулы в явном виде представляют поле как суперпозицию исходного поля $\vec{E}_0$ и поля однородного поляризованного шара с дипольным моментом $\vec{P}V$ (внутри шара берется $V' = \frac{4\pi r^3}{3}$).

Можно найти и плотность связанных зарядов на поверхности шара, если воспользоваться формулой (17.14). Поскольку

$$E_r = E\cos\vartheta,$$

то

$$\sigma_{\text{св з}} = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}E_0\cos\vartheta.$$

§ 18. Проводники в электростатическом поле

18.1. Уединенный проводник. Электроемкость. Еще из школьного курса физики известно, что проводник, помещенный в электростатическое поле, заряжается по поверхности. В отсутствии поля плотность свободных зарядов в проводнике равна нулю, так как в любом макроскопическом объеме число положительных и отрицательных зарядов одинаково.

Это, однако, не означает, что свободных зарядов нет: в проводнике имеется очень большое количество утерявших связь с ядрами электронов. Под действием внешнего поля $\vec{E}_{\text{в}}$ они движутся до поверхности проводника, создавая здесь отличную от нуля плотность заряда σ. Соответственно возникает поле этих зарядов с напряженностью $\vec{E}'$. Движение зарядов продолжается до тех пор, пока поле внутри проводника не исчезнет, т. е. будет

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{в}} + \vec{E}' = 0.$$

В таком случае из формул (17.1) следует, что $\varrho = 0$, т. е. объемная плотность свободных зарядов внутри проводника равна нулю.

Таким образом, речь идет о случаях, когда внутренних свободных зарядов достаточно для создания напряженности $\vec{E}' = -\vec{E}_{\text{в}}$. Впрочем, это выполняется практически всегда.

Этот вывод справедлив в статическом случае и для заряженного проводника: все помещенные на него заряды располагаются на поверхности.

Возможно сопоставление с однородным диэлектриком в однородном электростатическом поле: поляризация приводит к образованию только поверхностных связанных зарядов. Но если в диэлектрике поле ослаблено по сравнению с вакуумом в ε раз, то в проводнике оно вообще отсутствует, т. е. можно формально считать для проводника $\varepsilon = \infty$.

Итак, все нескомпенсированные свободные заряды расположены на поверхности проводника, они образуют тонкий электрический слой порядка размеров атома. Из граничного условия (16.10) вытекает для проводника важное заключение:

$$\varepsilon \varepsilon_0 E_n = \sigma, \tag{18.1}$$

которое дает связь напряженности поля снаружи на поверхности проводника с поверхностной плотностью заряда. Тангенциальная составляющая напряженности поля вне проводящего тела в силу граничного условия (16.17) равна нулю, так как напряженность поля внутри проводника равна нулю:

$$E_t = 0. \tag{18.2}$$

Подводя итог, заключаем: линии напряженности электростатического поля перпендикулярны поверхности проводника и начинаются или оканчиваются на зарядах, расположенных на этой поверхности:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \vec{n}, \tag{18.3}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник, а $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности (рис. 18.1).

Вследствие того, что внутри проводника напряженность равна нулю, потенциал всех точек проводника один и тот же. (Это непосредственно видно из формулы связи потенциала и напряженности $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$.) Таким образом, можно говорить о потенциале всего проводящего тела (вместо потенциала точки поля).

Запишем выражение (17.7) для потенциала системы зарядов, распределенных по поверхности проводника, учитывая, что проводник окружен однородным диэлектриком:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{k}{\varepsilon} \oint\limits_S \frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dS_0$$

Поместим начало координат в точке наблюдения M. Тогда формула упростится:

$$\varphi(0) = \frac{k}{\varepsilon} \oint\limits_S \frac{\sigma(\vec{r})}{r} dS. \tag{18.4}$$

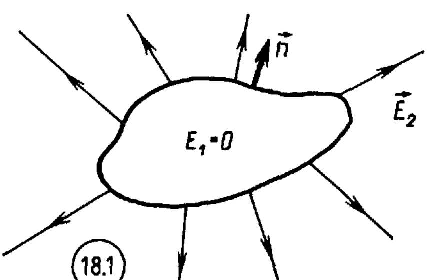
Если точка наблюдения находится в пределах проводника, то должно получиться значение φ, не зависящее от выбора точки. Это приводит к пропорциональности потенциала φ заряду проводника. Введем определение новой физической величины – *электроемкости проводника* – формулой

$$\varphi = \frac{Q}{C}, \tag{18.5}$$

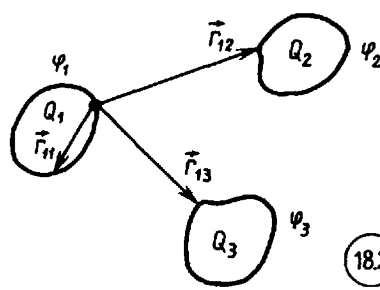
где Q – заряд проводника, а C – его электроемкость. Из соображений размерности следует

$$C = \frac{\varepsilon}{k} \langle r \rangle. \tag{18.6}$$

В формуле (18.6) $\langle r \rangle$ – величина с размерностью длины. Этот параметр имеет смысл некоторых средних линейных размеров, характе-



18.1



18.2

ризующих тело, так как расстояния до точек на поверхности проводника входят в интеграл (18.4). Конечно, электроемкость не зависит от величины заряда на проводнике, а определяется согласно формуле (18.6) размерами, формой проводника и окружающим проводник диэлектриком.

Для практического определения электроемкости следует пользоваться формулой (18.5). С помощью же формулы (18.6) расчет электроемкости можно провести только для тела простейшей формы. Пусть шарообразный проводник находится в вакууме, тогда $\varepsilon = 1$; заряд распределяется по поверхности равномерно, а $\langle r \rangle = R$, т. е.

$$C = \frac{R}{k}.$$

Единица электроемкости — 1 фарад (Ф):

$$1\ \text{Ф} = 1\ \text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{4} \cdot \text{А}^{2}.$$

Фарад — это емкость шара радиусом $9 \cdot 10^9$ м.

18.2*. Система проводников. При наличии в пространстве нескольких заряженных проводников потенциал каждого из них зависит от расположения зарядов в пространстве, т. е. от расстояний до других проводников, их формы и размеров, от диэлектрической проницаемости среды, разделяющей проводники. Чтобы непосредственно убедиться в этом, рассмотрим систему проводников, помещенных в однородный диэлектрик (рис. 18.2), и применим для нахождения потенциала одного из проводников формулу (18.4):

$$\varphi_i = \frac{k}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{N} \oint_{S_j} \frac{\sigma(\vec{r}_{ij})}{r_{ij}} dS_j. \tag{18.7}$$

Повторяя рассуждения, проведенные в предыдущем параграфе, вместо формулы (18.7) можно записать:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} Q_j, \tag{18.8}$$

где α_{ij} постоянные коэффициенты. Все $\alpha_{ij} \geq 0$, причем $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ (теорема взаимности, доказательство которой мы опускаем).

Решим систему алгебраических уравнений (18.8) относительно зарядов, в результате чего получим по формулам линейной алгебры

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \varphi_j. \tag{18.9}$$

Здесь

$$C_{ij} = \frac{A_{ij}}{D},$$

где D — определитель матрицы коэффициентов α_{ij}; A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу α_{ij}.

Коэффициенты C_{ij} зависят от формы и размеров тел, их взаимного расположения, диэлектрических свойств среды. Величины C_{ii} называются *коэффициентами емкости*, а C_{ij} – *коэффициентами индукции*. Можно показать, что $C_{ij} = C_{ji}$. Кроме того, оказывается, что $C_{ii} > 0$, $C_{ij} \leq 0$.

Пример 18.1. **Система двух проводников – конденсатор.**

Исследуем систему из двух проводников при условии, что заряды на них равны по модулю и противоположны по знаку. Согласно формуле (18.9)

$$-Q = C_{1,1}\varphi_1 + C_{1,2}\varphi_2; \tag{1}$$

$$Q = C_{2,1}\varphi_1 + C_{2,2}\varphi_2. \tag{2}$$

Положим $\varphi_2 = 0$. Складывая равенства (1) и (2) и учитывая, что $C_{1,2} = C_{2,1}$, получим

$$C_{1,1} = -C_{1,2}.$$

Аналогично: если выбрать $\varphi_1 = 0$, то окажется

$$C_{2,2} = -C_{1,2},$$

откуда следует, что $C_{1,1} = C_{2,2}$. Таким образом,

$$C_{1,1} = C_{2,2} = -C_{1,2} = -C_{2,1} = C.$$

Система, состоящая из двух проводников с равными по модулю зарядами, называется конденсатором. Как из равенства (1), так и из равенства (2) для конденсатора следует

$$C = \frac{Q}{\varphi_2 - \varphi_1}. \tag{18.10}$$

Величину C называют емкостью конденсатора. Всегда $C > 0$. Поэтому в формуле (18.10) предполагается. что φ_2 – потенциал той обкладки, заряд которой положителен. Конденсатор может быть изолирован от влияния других тел в пространстве, т. е. емкость определяется только параметрами самого конденсатора.

Пример 18.2. **Расчет поля при наличии в нем проводящего тела.**

Рассмотрим на простом примере решение задачи электростатики с проводящим телом. Для этого воспользуемся данными примера 17.6, но вместо шара из диэлектрика поместим в однородное поле проводящий шар.

Вне шара используем решение уравнения Лапласа, найденное в задаче 17.6:

$$\varphi = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r^2}\right)\cos\vartheta. \tag{1}$$

Постоянные коэффициенты C_1 и C_2 следует определить из граничных условий. Вдали от шара

$$\vec{E}\,|_{r\to\infty} = \vec{E}_0,$$

откуда

$$\varphi\,|_{r\to\infty} = -\vec{E}_0\vec{r},$$

$$-C_1 = E_0. \tag{2}$$

Потенциал проводника должен быть конечной постоянной величиной. На поверхности шара

$$\varphi = \left(C_1 a + \frac{C_2}{a^2}\right)\cos\vartheta = \text{const},$$

что дает

$$C_1 a + \frac{C_2}{a^2} = 0,$$

откуда $$C_2 = E_0 a^3 \qquad (3)$$

Итак, потенциал поля определяется формулой

$$\varphi = E_0 \left(-r + \frac{a_3}{r^2}\right)\cos\vartheta \qquad (4)$$

Нетрудно найти и составляющие напряженности поля В сферической системе координат

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = E_0\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)\cos\vartheta,$$

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = E_0\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)\sin\vartheta,$$

$$E = E_0\sqrt{\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)^2\cos^2\vartheta + \left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)^2\sin^2\vartheta} \qquad (5)$$

При $r = a$, углах $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ имеем $E = E_{max} = 3E_0$ На «экваторе» шара $E = E_{min} = 0$ Заряд распределяется по поверхности шара с плотностью

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\vartheta \qquad (6)$$

(Следует учесть, что проводник находится в вакууме)

Осталось заметить, что эти результаты мы могли бы получить, не решая задачу для проводника вновь, а используя потенциал поля, найденный в примере 17 6, и полагая в формуле (14) $\varepsilon = \infty$

18.3. Энергия электростатического поля как энергия взаимодействия системы тел. Запишем выражение для энергии электростатического поля в веществе, полученное из общей формулы (16.22):

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{D}\,\vec{E}dV. \qquad (18\ 11)$$

Пусть в однородной диэлектрической среде имеется некоторая система однородных тел конечных размеров, на которых и сосредоточены электрические заряды. В таком случае все пространство заполнено кусочно-однородным веществом.

Преобразуем формулу (18.11), вводя скалярный потенциал вместо напряженности и используя тождество (см. П. II, 15). Получаем

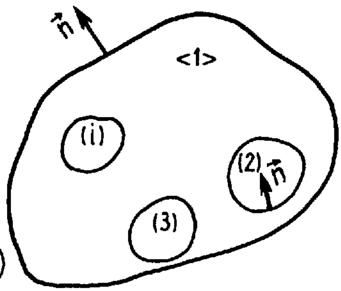
$$-\vec{D}\operatorname{grad}\varphi = \varphi\operatorname{div}\vec{D} - \operatorname{div}(\varphi\vec{D}).$$

Применяя уравнения (17.1), находим

$$W = \frac{1}{2}\int\varphi\varrho dV - \frac{1}{2}\int\operatorname{div}(\varphi\vec{D})\,dV.$$

Далее запишем интегралы, подразделяя область интегрирования на части в соответствии с рисунком 18.3, причем область (1) охватывает всю рассматриваемую среду, а области (2), (3) и т. д.—тела в ней:

$$W = \frac{1}{2}\int_{V_1}\varphi\varrho dV + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\int_{V_i}\varphi\varrho dV - \frac{1}{2}\int_{V_1}\operatorname{div}(\varphi\vec{D})\,dV - \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\int_{V_i}\operatorname{div}(\varphi\vec{D})\,dV. \qquad (18.12)$$



18.3

Первое слагаемое в формуле (18.12) равно нулю, так как заряды расположены только на телах. Третье слагаемое представим в виде суммы поверхностных интегралов:

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{V_1}\operatorname{div}(\varphi\vec{D})\,dV=-\frac{1}{2}\oint\limits_{S_1}\varphi D_n dS-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\oint\limits_{S_i}\varphi D_n dS.$$

Поверхностный интеграл по внешней границе обращается в нуль, если поверхность S_1 сдвинуть в бесконечность, т. е. учесть всю протяженность поля.

Объемные интегралы вида

$$\int\limits_{V_i}\operatorname{div}(\varphi\vec{D})\,dV$$

также сводятся к поверхностным·

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\int\limits_{V_i}\operatorname{div}(\varphi\vec{D})\,dV=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\oint\limits_{S_i}\varphi D_n dS.$$

(Знак сменился потому, что выбранная нормаль $\vec{n}_i$ для всех областей $i=2,\ 3,\ \ldots,\ N$ является внутренней.) При подстановке полученных выражений в формулу (18.12) сгруппируем поверхностные интегралы по индексу области. Например, для области (2) получим член

$$\frac{1}{2}\oint\limits_{S_2}\varphi\,(D_{n_2}-D_{n_1})\,dS,$$

который с помощью граничного условия (16.9) преобразуется в выражение

$$\frac{1}{2}\oint\limits_{S_2}\varphi\sigma dS.$$

В итоге формула для энергии поля системы заряженных тел в среде приобретает вид

$$W=\frac{1}{2}\sum_{k}\int\limits_{V_k}\varphi\varrho dV+\frac{1}{2}\sum_{k}\oint\limits_{S_k}\varphi\sigma dS, \qquad (18.13)$$

где суммирование производится по всем заряженным телам системы. Полученный вывод замечателен тем, что сводит энергию электростатического поля заряженных тел к энергии системы свободных зарядов в поле с потенциалом $\varphi(\vec{r})$. В этом отношении формула (18.13) аналогична формуле энергии системы зарядов в вакууме (7.14). Однако теперь связанные заряды, входящие в состав вещества, учитываются в значениях потенциалов, уменьшая потенциал, а вместе с ним и энергию системы (см. § 17, п. 17.1).

Формула (18.13) подходит к диэлектрическим телам, на которых свободный заряд может быть распределен как по объему, так и по поверхности. (Если в системе есть заряженные нити, то следует учесть также слагаемые вида $\int\limits_{L_k} \varphi\tau dl$.)

Система заряженных проводников в вакууме или диэлектрической среде за счет распределенной по пространству энергии электростатического поля обладает энергией, которую можно рассматривать как потенциальную энергию взаимодействия заряженных проводников. В самом деле, если воспользоваться формулой энергии системы заряженных тел (18.13) и учесть, что заряды распределены только по поверхностям проводников, а потенциалы каждого проводника одинаковы во всех точках, то сразу получим

$$W = \frac{1}{2} \sum_k \varphi_k \oint_{S_k} \sigma dS = \frac{1}{2} \sum_k \varphi_k Q_k. \tag{18.14}$$

Формально (18.14) совпадает с формулой (7.10) – выражением для энергии системы точечных зарядов в вакууме.

Если использовать выражение для зарядов проводника через коэффициенты емкости и индукции (18.9), то формула (18.14) для энергии системы проводников примет вид

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \sum_{k=1}^{N} C_{ik} \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} C_{ik} \varphi_i \varphi_k. \tag{18.15}$$

Формула (18.15) для уединенного проводника приводит к известному из курса общей физики выражению

$$W = \frac{C\varphi^2}{2}. \tag{18.15-a}$$

То же выражение мы получим для конденсатора, где в качестве φ фигурирует разность потенциалов между обкладками, а C – емкость.

18.4. Силы, действующие на тела в электростатическом поле. Сила, действующая на (твердое) тело в электрическом поле, определяется равнодействующей сил, действующих на свободные и связанные заряды в элементах объема тела:

$$\vec{F} = \int\limits_V \vec{E}\,(\varrho + \varrho_{\text{св з}})\,dV. \tag{18.16}$$

В § 7, п. 7.2 рассмотрены силы, действующие на систему зарядов в поле. Сейчас мы найдем силы, действующие в электрическом поле на тела и вещественную среду, учитывая специфику распределения зарядов в диэлектриках и проводниках.

В твердом диэлектрике электрические заряды жестко связаны. Поэтому можно применить формулу (7.8)

$$\vec{F} = (\vec{p}\nabla)\,\vec{E},$$

где $\vec{p}$ — дипольный момент системы, а $\vec{E}$ — напряженность поля. Для незаряженного, но поляризованного диэлектрика дипольный момент элементарного объема dV определяется формулой (15.1)

$$d\vec{p} = \vec{P}dV,$$

где $\vec{P}$ — вектор поляризации вещества. Для элементарной силы получим

$$d\vec{F} = (\vec{P}\,\nabla)\,\vec{E}dV.$$

Учитывая материальное уравнение (15.8), имеем

$$d\vec{F} = \chi\varepsilon_0\,(\vec{E}\,\nabla)\,\vec{E}dV.$$

Учитывая тождество (см. П. II, 29) и уравнения поля (17.1), можно показать, что

$$\operatorname{grad}(\vec{E}\,\vec{E}) = 2\,(\vec{E}\,\nabla)\,\vec{E} + 2\,[\vec{E}\operatorname{rot}\vec{E}] = 2\,(\vec{E}\,\nabla)\,\vec{E}.$$

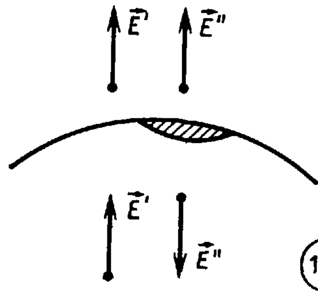
Тогда для плотности силы $\vec{f} = \dfrac{d\vec{F}}{dV}$ получим

$$\vec{f} = \frac{\chi\varepsilon_0}{2}\operatorname{grad}E^2. \tag{18.17}$$

Характерно, что направление силы не зависит от направления силовых линий; она направлена всегда в сторону возрастания модуля напряженности поля, т. е. диэлектрик как бы втягивается в поле.

Найдем теперь силу, действующую на проводник, помещенный в электрическое поле. Так как заряды сосредоточены на поверхности проводника, то соответственно и поле действует на поверхность проводника. Напряженность поля на поверхности проводника выражена формулой (18.3)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\vec{n}.$$



18.4

Однако для расчета силы, действующей на некоторую малую площадку поверхности проводника, нужно знать не эту величину, а напряженность поля $\vec{E}'$, созданного всеми зарядами, за вычетом заряда данной площадки. Применим следующий прием: мысленно вырежем некоторую площадку (рис. 18.4) вместе с зарядом на ней и исключим действие ее заряда на поле. Тогда в данном месте при переходе границы тела скачка напряженности не будет: напряженность $\vec{E}'$ окажется непрерывной величиной. Пусть площадка создает поле напряженностью $\vec{E}''$, как показано на рисунке. Внутри проводника $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}'' = 0$, т. е. $\vec{E}'' = -\vec{E}'$; следовательно, при наличии площадки снаружи тела $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}'' = 2\vec{E}'$, а $\vec{E}' = \frac{\vec{E}}{2}$.

Вычислим элементарную силу, действующую на площадку dS:

$$d\vec{F} = \vec{E}'\sigma dS = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}\vec{n}dS.$$

Для плотности силы имеем выражение

$$\vec{f}_{\text{пов}} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}\vec{n}. \tag{18.18}$$

Его можно преобразовать, принимая в расчет формулу (18.3). Получаем

$$f_{\text{пов}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \tag{18.19}$$

т. е. модуль плотности силы равен плотности энергии поля у поверхности проводника.

Методические указания и рекомендации

I. Электростатическое поле является наиболее подробно изучаемым из всей электродинамики объектом в курсе средней школы и в курсе общей физики. Для него вводятся основные характеристики – напряженность и потенциал, рассматривается теорема Гаусса и т. д. Кроме того, анализируется явление поляризации, электростатической индукции.