

Вычислим сопротивление среды между этими двумя электродами по формуле

$$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} \quad (19.19)$$

и учтем, что  $I_1 = -I_2 = I$ . Получим

$$R = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\gamma} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right).$$

Эта формула применяется, например, для расчета сопротивления участков цепи с жидкими проводниками по заданным параметрам среды и электродов.

## §20. Магнитное поле постоянных линейных токов

**20.1. Закон Био-Савара.** Основным источником магнитных полей, используемых человеком в технических и научных целях, являются линейные электрические токи. Поэтому целесообразно специально рассмотреть магнитное поле линейного тока.

Влиянием вещества проводника, по которому течет ток, на создаваемое поле можно пренебречь, так как проводник линейный, т. е. достаточно малого сечения. Влияние же вещества, в котором получаем магнитное поле, удобно учесть, используя в промежуточных расчетах величину  $\vec{H}$ , а затем переходить к  $\vec{B}$ .

Основными формулами для этого случая служит уравнение из системы (19.4)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (20.1)$$

и материальное уравнение

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (20.2)$$

Уравнение (20.1) приводится к интегральной форме совершенно аналогично рассмотренному в начале курса случаю поля в вакууме (см. § 2, п. 2.2):

$$\oint_L \vec{H} \vec{dl} = I, \quad (20.3)$$

т. е. циркуляция вектора напряженности магнитного поля по любому контуру равна силе тока, пронизывающего контур. Этой формулой удобно пользоваться в случаях симметричного распределения тока в пространстве. Однако более общим является иной подход.

Вводя векторный потенциал для магнитного поля соотношением

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}_H, \quad (20.4)$$

по аналогии с выводами для магнитоэстатического поля в вакууме (§ 8), имеем вместо уравнения (20.1) уравнение

$$\Delta \vec{A}_H = -\vec{j}. \quad (20.5)$$

Решение уравнения (20.5) известно (см. формулу (8.3)):

$$\vec{A}_H = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0.$$

Для определения напряженности по формуле (20.4) можно воспользоваться готовым расчетом пункта 8.2:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{[\vec{j}(\vec{r}_0)\vec{r}]}{(r')^3} dV_0, \quad (20.6)$$

где обозначения соответствуют рисунку 8.1.

Осталось перейти к линейным токам. Согласно формуле (1.10) для элемента тока имеем

$$\vec{j}dV = I d\vec{l},$$

поэтому формула (20.6) приводится к виду

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} I \int_L \frac{[d\vec{l}\vec{r}]}{(r')^3} \quad (20.7)$$

с обозначениями рисунка 20.1.

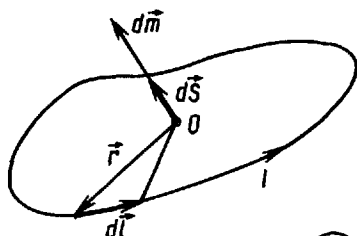
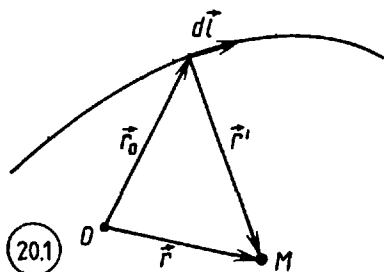
Формула (20.7) выражает закон Био-Савара для магнитного поля тока. Это его интегральная форма. В дифференциальной форме закон задает напряженность, созданную элементом проводника  $d\vec{l}$ :

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} I \frac{[d\vec{l}\vec{r}]}{(r')^3}. \quad (20.8)$$

Соотношения (20.7) и (20.8) широко применяются на практике для расчета магнитных полей линейных токов заданной конфигурации. Вещество, в котором образуется магнитное поле, изменяет последнее. Конечный этап решения задачи — переход к индукции магнитного поля с учетом магнитных свойств вещества:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \quad (20.9)$$

Это необходимо потому, что именно индукция определяет силовое действие магнитного поля, его энергию.



Остановимся еще на магнитном моменте линейного тока. Часто магнитные свойства системы с замкнутыми линиями тока характеризуются магнитным дипольным моментом (8.11), который для линейного замкнутого тока имеет вид

$$\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint_L [\vec{r} d\vec{l}]. \quad (20.10)$$

В формуле (20.10) интегрирование производится по всей длине замкнутого проводника (рис. 20.2). Нетрудно убедиться (см. пример 8.2), что для плоского контура с током магнитный момент выражается формулой

$$\vec{m} = I \vec{S}, \quad (20.11)$$

где  $\vec{S}$  – вектор площади, обтекаемой током. (Нужно только учесть, что  $[\vec{r} d\vec{l}] = 2d\vec{S}$  и для всех элементов площади векторы  $d\vec{S}$  направлены одинаково.)

В дипольном приближении магнитное поле проводника с током определяется в соответствии с формулами (8.12) и (8.13)

$$\begin{aligned} \vec{A}_H &= \frac{1}{4\pi} \frac{[\vec{m}\vec{r}]}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{[\vec{m}\vec{n}]}{r^2}, \\ \vec{H} &= \frac{1}{4\pi} \frac{3\vec{n}(\vec{m}\vec{n}) - \vec{m}}{r^3}. \end{aligned} \quad (20.12)$$

Магнитное поле на большом расстоянии от системы токов определяется с учетом заполняющего пространство магнетика по формуле (20.12)

Ранее говорилось, что магнитное поле имеет релятивистскую природу. В частности, электрическая энергия взаимодействия зарядов при малых скоростях движения во много раз больше магнитной энергии. И только при релятивистских скоростях магнитная составляющая сравнима с электрической. Это непосредственно видно и из сопоставления формул напряженности  $\vec{E}$  и индукции  $\vec{B}$  поля (6.13) и (8.6): при малых скоростях движения зарядов численное значение электрической напряженности из-за большого множителя  $k$  оказывается значительно больше численного значения магнитной индукции, в выражение которой входит малый множитель  $f$ . Поскольку силовое действие полей определяется составляющими силы Лоренца (1.8), пропорциональными  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , то при малых скоростях движения зарядов магнитная составляющая пренебрежимо мала по сравнению с электрической

Поэтому в предыдущих параграфах можно было считать, что только электрическое поле формирует ток, определяя вместе со связями, накладываемыми веществом, движение зарядов в проводнике. Иными словами, мы исходили из предположения о медленном движении зарядов в проводнике. Предположение подтверждается экспериментально: заряды, составляющие ток в проводнике, движутся со скоростями порядка миллиметров и сантиметров в секунду.

Но это вовсе не означает, что магнитное поле тока мало по сравнению с электрическим во всех случаях. Макроскопическое магнитное поле системы движущихся зарядов велико при больших количествах движущихся зарядов одного знака. Металлический проводник, например электронейтральная система положительных ионов и отрицательных электронов, не создает существенного макроскопического электрического поля, но создает значительное магнитное поле вследствие движения электронов. Таким образом, здесь магнитное поле отнюдь не мало и играет основную роль во внешних проявлениях тока – действиях проводника с током на другие токи.

Магнитное поле и магнитное взаимодействие токов чрезвычайно широко при-

меняются в технике. Достаточно сказать, что на них основано действие всех электродвигателей, электромагнитов, генераторов тока, множества разнообразных приборов.

**Пример 20.1. Расчет магнитного поля кругового тока.**

В соответствии с формулой (20.8) вектор напряженности  $\vec{H}$  в центре направлен перпендикулярно плоскости кольца и составляет с током правый винт (рис. 20.3). Для модуля напряженности получаем

$$H = \frac{I}{2r}. \quad (20.13)$$

Широко применяемые в электротехнике различные магнитные катушки — соленоиды — представляют собой совокупность витков с током. Магнитное поле в них складывается из магнитных полей отдельных витков

**Пример 20.2. Расчет магнитного поля проводника конечной длины.**

Элемент проводника длиной  $d\vec{l}$  создает поле (рис. 20.4)

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}\vec{r}']}{r'^3}.$$

С учетом направлений векторов имеем

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{dl}{r'^2} \sin(d\vec{l}\vec{r}').$$

Направим ось  $Oz$  вдоль по току, тогда

$$dH = \frac{IR}{4\pi} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Так как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{z},$$

то

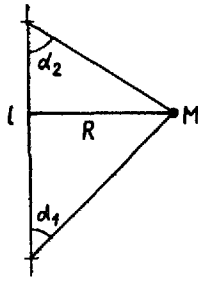
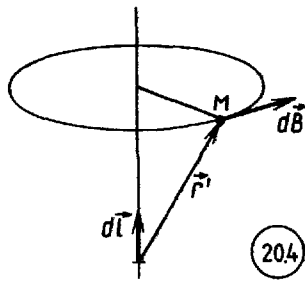
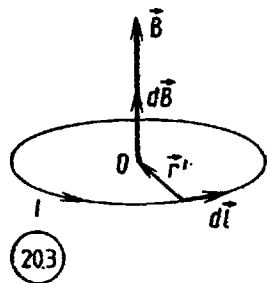
$$dH = \frac{I}{4\pi R} \sin \alpha da.$$

Интегрируя по длине проводника  $l$ , получаем результат:

$$H = \frac{I}{4\pi R} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

(индукция направлена по касательной к окружности, проходящей через точку  $M$ ).

Для бесконечного проводника ( $l \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_2 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_1 \rightarrow \pi$ )



$$H = \frac{I}{2\pi R}$$

Аналогичная формула (2.16) выведена выше другим способом

**20.2. Понятие о магнитоэлектродинамике магнетиков.** Явление намагничивания вещества и величины, характеризующие намагничивание и магнитные свойства вещества, рассмотрены ранее, в § 15. Магнитное поле некоторой системы токов в веществе изменяется благодаря магнитным свойствам последнего. По сравнению с вакуумом оно возрастает в  $\mu$  раз в парамагнетиках и ферромагнетиках и ослабевает в диамагнетиках (там  $\mu < 1$ ). (В настоящее время различают также ферриты, антиферромагнетики и новейший класс магнитных веществ, не укладывающийся в рамки феноменологической электродинамики и имеющий многие до сих пор не объясненные физикой свойства. Это спиновые стекла.)

Для кусочно-непрерывной магнитной среды может возникнуть задача, аналогичная основной задаче электростатики: потребуются найти магнитное поле при наличии границ раздела между областями с различными  $\mu$ . При ее решении следует найти напряженность магнитного поля  $\vec{H}$ , созданного токами во всем пространстве, а затем учесть магнитные свойства вещества и граничные условия — поведение нормальных и тангенциальных составляющих векторов  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  на границах раздела сред.

Рассмотрим с качественной стороны наиболее типичную задачу о магнитном поле токов при наличии ферромагнитных тел с большим  $\mu$ .

Речь идет, например, о соленоиде с сердечником из ферромагнитного материала. Напряженность магнитного поля внутри бесконечного соленоида выражается формулой

$$H = nI,$$

где  $n$  — число витков на единицу длины, а  $I$  — сила тока

Если соленоид снабжен сердечником, то индукция поля внутри его увеличивается в  $\mu$  раз по сравнению с вакуумом:

$$B = \mu\mu_0 nI$$

Пусть теперь имеем дело с замкнутым сердечником конечных размеров, магнитное поле в котором возбуждается витками линейного проводника с током (рис. 20.5). Определяя напряженность поля  $\vec{H}$  внутри сердечника по заданному току, анализируем характер поля с помощью граничных условий (см. табл. 1).

В области витков с током, где  $\vec{H}$  имеет максимальное значение, вектор  $\vec{H}$  почти параллелен поверхности сердечника; поэтому

$H_{1n} \approx 0$  и имеется в основном одна тангенциальная составляющая магнитного поля. Используя условие

$$\frac{B_{2t}}{B_{1t}} = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

получаем

$$B_{2t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1t} \approx \frac{B_{1t}}{\mu_1}.$$

Магнитное поле вне сердечника резко ослабевает ( $\mu_2 \ll \mu_1$ ), т. е. оно практически полностью концентрируется в сердечнике.

Если в сердечнике имеется поперечный разрез-зазор, то для индукции магнитного поля, вектор которой нормален к образованной зазором границе раздела, используем граничное условие

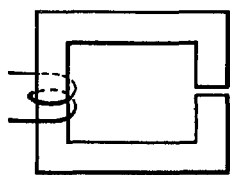
$$B_{2n} = B_{1n}.$$

Это значит, что поле внутри зазора, который имеет небольшую протяженность по сравнению с шириной сердечника, практически не ослабевает.

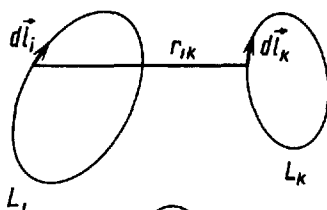
Приведенные рассуждения позволяют понять роль всевозможных сердечников и магнитопроводов. Они предназначены для концентрации магнитного поля, созданного током, в определенных местах пространства, для передачи его без рассеивания магнитных линий от места образования током к месту использования при одновременном многократном усилении поля. (В электротехнике используется понятие магнитной цепи, в которой существует магнитное поле. Это совокупность тел, концентрирующих магнитное поле внутри себя.)

**20.3. Энергия магнитного поля постоянных токов. Коэффициенты индукции.** Рассмотрим систему замкнутых проводников с током, помещенных в однородную магнитную среду (рис 20.6) В § 8, п. 8.5 показано, что энергия магнитного поля может быть представлена как энергия взаимодействия токов между собой. С помощью формулы (8.17) имеем

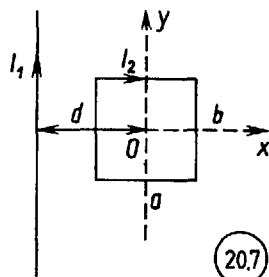
$$W = \sum_i \frac{1}{2} I_i \oint_{L_i} \vec{A}_i \vec{dl}_i. \quad (20.14)$$



(20.5)



(20.6)



(20.7)

Подставляя сюда значение потенциала  $\vec{A}$ , найденное по формуле (8.3) с учетом магнитной среды, приходим к выражению

$$W = \frac{\mu f}{2} \sum_{ik} I_i I_k \oint_{L_i, L_k} \frac{\vec{d}\vec{l}_i \vec{d}\vec{l}_k}{r_{ik}}. \quad (20.15)$$

Преобразуем равенство (20.14), используя теорему Стокса:

$$\oint_{L_i} \vec{A}_i \vec{d}\vec{l}_i = \int_{S_i} \text{rot } \vec{A}_i \vec{d}\vec{S}_i = \int_{S_i} \vec{B}_i \vec{d}\vec{S}_i = \Phi_i,$$

где  $\Phi_i$  — поток вектора индукции магнитного поля через контур проводника с током. Следовательно,

$$W = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i. \quad (20.16)$$

Можно усмотреть аналогию в выражениях (20.16) и (18.14) — формулах энергии системы токов и энергии системы заряженных проводников. Аналогия может быть продолжена, если в формуле (20.15) ввести коэффициенты, определяемые взаимным расположением в пространстве, формой и размерами проводников, а также магнитными свойствами среды:

$$L_{ik} = \mu f \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{\vec{d}\vec{l}_i \vec{d}\vec{l}_k}{r_{ik}}. \quad (20.17)$$

Они называются: если  $i = k$ , то  $L_{ii}$  — коэффициент самоиндукции (индуктивность); если  $i \neq k$ , то  $L_{ik}$  — коэффициент взаимной индукции. Теперь

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k. \quad (20.18)$$

Формула (20.18) аналогична формуле (18.15), причем ток нужно сопоставить потенциалу, а коэффициенты  $L_{ik}$  — коэффициентам  $C_{ik}$ . В частности, для одного проводника с током

$$W = \frac{1}{2} L I^2. \quad (20.19)$$

Сравним также выражения для энергии магнитного поля (20.16) и (20.18). Если в формуле (20.18) отделить суммирование по  $i$  от суммирования по  $k$ , то

$$W = \frac{1}{2} \sum_i I_i \sum_k L_{ik} I_k.$$

При сравнении можно видеть, что

$$\Phi_i = \sum_k L_{ik} I_k. \quad (20.20)$$

Теперь открывается возможность определения коэффициента  $L_{ik}$

через поток магнитной индукции. Например, для одиночного проводника

$$\Phi = LI.$$

(Понятно, что прямой расчет по формуле (20.17) возможен только в случае простейших конфигураций токов.)

Итак, энергия системы линейных токов, являющаяся по своей природе энергией магнитного поля, выражается в стационарном (и квазистационарном) случае величинами, которые можно трактовать как энергию взаимодействия токов между собой. В такой форме энергия выражается через силу тока и коэффициенты само- и взаимной индукции.

**Пример 20.3. Расчет коэффициентов  $L_{ik}$ .**

Найдем коэффициент взаимной индукции между прямым бесконечным проводом и прямоугольной проводящей рамкой (рис. 20.7). Поток магнитной индукции, пронизывающий рамку, определяется по формуле (20.20)

$$\Phi_2 = L_{2,1}I_1 + L_{2,2}I_2, \quad (1)$$

где слагаемое  $L_{2,1}I_1$  выражает часть потока, созданную полем прямого тока. Но ее можно подсчитать непосредственно через индукцию поля:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

В данном случае вектор  $\vec{B}$  везде перпендикулярен плоскости рамки, поэтому

$$\Phi = \int_S B dS.$$

Выбирая оси координат, как показано на рисунке, на основании формулы для индукции поля прямого тока (2.16) имеем

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-a/2-b/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{dx dy}{d+x},$$

откуда

$$\Phi = \frac{\mu_0 b I}{2\pi} \ln \frac{2d+a}{2d-a}. \quad (2)$$

Сопоставляя значения  $\Phi$  (1) и (2), получаем

$$L_{2,1} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{2d+a}{2d-a}.$$

**20.4. Механические силы, действующие в магнитном поле. Формула Ампера.** Найдем силу, действующую на проводник с током в магнитном поле. Располагая формулой (1.8) для магнитной составляющей силы Лоренца, можно записать

$$d\vec{F}_M = [j\vec{B}] dV,$$

или для элемента линейного тока

$$d\vec{F}_M = I[d\vec{l} \vec{B}]. \quad (20.21)$$

Это выражение носит название закона Ампера. Для проводника конечной длины формула Ампера приобретает вид

$$\vec{F}_M = I \int_L [d\vec{l} \vec{B}]. \quad (20.22)$$



Ранее было найдено выражение (8.14) для энергии (жесткой) системы токов во внешнем поле в приближении дипольного магнитного момента.

$$U = -\vec{m}\vec{B}. \quad (20.23)$$

Эта формула применима к линейным токам, протекающим по жесткому контуру, причем магнитный момент тока следует вычислять по формуле (20.10), а для плоского контура — по формуле (20.11).

Кроме формул Ампера для вычисления силы и момента силы, действующих на контур, можно использовать соотношения (8.15) и (8.16).

Первое из них позволяет найти силу, действующую на магнетик. Элемент объема  $dV$  обладает дипольным моментом  $d\vec{m}$ . На него действует сила

$$d\vec{F} = (d\vec{m}\nabla)\vec{B}.$$

Используя формулы (15.12), (15.16) и (15.23), приводим это выражение к виду

$$d\vec{F} = \frac{\chi}{\mu\mu_0} (\vec{B}\nabla)\vec{B}dV.$$

Отсюда плотность силы равна:

$$\vec{f} = \frac{\chi}{2\mu\mu_0} \text{grad } B^2. \quad (20.24)$$

(Последний шаг в преобразованиях сделан на основе формулы 29 из приложения II. Учтено, что в магнетике токов нет, поэтому  $\text{rot } \vec{B} = 0$ .)

Выражение (20.24) аналогично формуле (18.17) для силы, действующей на диэлектрик в электрическом поле. Из него следует, что парамагнитное тело втягивается в поле, т. е. движется под действием магнитных сил в сторону возрастания модуля индукции поля. Напротив, диамагнитное тело из поля выталкивается. Данный эффект используется при устройстве «магнитной подвески», т. е. когда образец вещества парит в воздухе, так как сила тяжести уравновешена магнитной силой. Этот опыт можно осуществить и с веществом в сверхпроводящем состоянии: сверхпроводники обладают свойствами идеального диамагнетика, у которого  $\chi = -1$ . (При  $\chi = -1$   $\vec{J} = -\vec{H}$ , где  $\vec{H}$  — напряженность магнитного поля. Результирующее магнитное поле в сверхпроводнике равно нулю:  $\vec{B} = (1 + \chi)\vec{B}_0 = 0$ .)

### Методические указания и рекомендации

I. Материал, изложенный в главе, носит прикладной характер — это применение общих законов и уравнений электродинамики в частных случаях, имеющих громадное практическое значение. Студенты изучают в курсе общей физики все входящие сюда вопросы, поэтому возможна организация самостоятельной проработки материала в ряде мест главы.