

где  $r$  — расстояние от центра кабеля, а  $I_r$  — ток, протекающий через круг радиусом  $r$ . Во внутренней жиле

$$B \approx \frac{2fI_r}{a^2},$$

в диэлектрике

$$B = \frac{2fI}{r}.$$

Вне кабеля  $B = 0$ . ( $\mu$  везде принято равным 1.)

8. Вычислить индуктивность кабеля длиной  $l$  (см. задачу 7).

Используем формулу

$$W \approx \frac{1}{2} LI^2.$$

Энергию поля найдем по формуле

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV.$$

Результат расчета:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left( \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right).$$

## Глава VIII КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Переменный ток и всевозможные его применения в промышленности, технике, быту связаны с особым частным случаем электромагнитного поля, называемого квазистационарным. Соответственно квазистационарным называется ряд процессов в веществе, электротехнических машинах и устройствах, таких, как генераторы переменного тока, трансформаторы, электродвигатели, линии для передачи электрической энергии. В данной главе рассматриваются принципиальные вопросы теории квазистационарного поля и квазистационарных процессов.

### § 21. Уравнения квазистационарного поля. Электромагнитная индукция

**21.1. Условия квазистационарности.** Основная система уравнений (15.22) рассматривается сейчас при наличии переменных полей:

$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$  и  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$ . Однако общее решение уравнений Максвелла

в запаздывающих потенциалах применять в ряде случаев нет смысла, потому что запаздывание в системе пренебрежимо мало, т. е.

$$\tau \ll T, \quad (21.1)$$

где  $\tau = \frac{l}{c}$  — время запаздывания, а  $T$  — характерное время изменения полей. Это и есть условие квазистационарности.

В электротехнике используется переменный ток с частотой 50 Гц. Электромагнитная волна с такой частотой имеет длину  $\lambda = 6 \cdot 10^6$  м. Ясно, что если размеры установок (моторы, генераторы, трансформаторы, осветительные системы и т. д.) меньше или порядка километра, то запаздывание внутри системы можно не учитывать. В технике применяются токи, синхронно (т. е. в фазе или с постоянной разностью фаз) изменяющиеся во всех участках системы. Электромагнитные поля в таких системах часто концентрируются в небольших объемах пространства (в зазоре между полюсами, в пределах сердечника и т. д.); излучение электромагнитных волн ничтожно. Если расстояния, на которых поля заметно отличны от нуля, значительно меньше  $\lambda$ , то и здесь можно пренебречь запаздыванием. Условие малости расстояний

$$|\vec{r}| \ll cT$$

есть другая форма критерия квазистационарности.

В квазистационарных процессах, как и в случае излучения в дипольном приближении (см. § 10), скорости движения зарядов нерелятивистские ( $v \ll c$ ). Но, кроме того, в квазистационарном случае поля изменяются сравнительно медленно. Это значит, что изменения магнитного и электрического полей вносят неравнозначные вклады в процессы, происходящие в системе.

В третьем уравнении из системы (15.22), если записать его с учетом формулы (15.27) в виде

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \gamma \vec{E},$$

первым слагаемым справа можно пренебречь по сравнению со вторым. Мы полагаем, что ток смещения мал и значительно меньше тока проводимости:

$$\left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \ll |\vec{j}|. \quad (21.2)$$

В то же время пренебрегать членом  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  в первом уравнении системы нет никаких оснований.

Выполнение неравенства (21.2) означает также, что  $\operatorname{rot} \vec{H}$  заметно отличается от нуля только в областях, где наблюдается направленное

движение зарядов; для вещества это токи проводимости. Поэтому в квазистационарном случае принимают, что токи представляют собой единственный источник вихревого магнитного поля.

К условиям квазистационарности следует также добавить общее для электродинамики вещества требование постоянства  $\gamma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ . Названные условия выполняются для очень широкого круга явлений, связанных с переменными токами в веществе, для явления электромагнитной индукции, так что квазистационарные процессы лежат в основе огромного числа технических применений полей и токов.

**21.2. Уравнения квазистационарного поля.** Выпишем систему уравнений Максвелла для квазистационарного поля:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & (1) & \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, & (3) \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, & (2) & \operatorname{div} \vec{D} = \rho, & (4) \end{cases} \quad (21.3)$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}.$$

К ней нужно добавить условие непрерывности тока. Оно следует из закона сохранения заряда (1.6); последнее преобразуется с учетом четвертого уравнения системы и условия (21.2):

$$0 = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx \operatorname{div} \vec{j},$$

т. е.

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (21.4)$$

Это значит, что линии тока для квазистационарных процессов являются квазизамкнутыми.

Если для стационарных процессов в веществе система основных уравнений распадалась на электрическую и магнитную подсистемы, связанные только током, то теперь связь подсистем теснее: электрическое поле имеет вихревую составляющую, обусловленную переменным магнитным полем.

Для анализа токов присоединим к системе уравнение закона Ома, которое мы считаем выполняющимся в квазистационарных полях:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

На основании закона Ома, условия (21.4) и четвертого уравнения системы (21.3) заключаем, что, как и при постоянных токах, объемные заряды в замкнутой цепи при квазистационарных переменных токах отсутствуют.

В формуле закона Ома учтем возможность действия в замкнутых цепях переменного тока сторонних полей, не отраженных системой уравнений (21.3). Как и в случае постоянных токов, имеем

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}). \quad (21.5)$$

Уравнения квазистационарного поля нетрудно записать и в потенциалах, опираясь на общие уравнения (16.3)

$$\begin{cases} \Delta \vec{A} = -\mu\mu_0 \vec{j}, \\ \Delta \varphi = -\frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \rho, \end{cases} \quad (21.6)$$

если

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (21.7)$$

Понятно, что теперь  $\vec{j}$  и  $\rho$  — функции времени, хотя уравнения (21.6) дифференцирования по времени не содержат. Время играет роль параметра, от которого зависят величины  $\rho$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{A}$  и  $\varphi$ . В соответствии с уравнениями (21.6) изменение потенциалов происходит во времени синхронно, без запаздывания, с изменением плотностей заряда и тока. Согласно (21.7) напряженность электрического поля  $\vec{E}$  имеет потенциальную и вихревую составляющие.

**21.3. Закон электромагнитной индукции Фарадея.** Выпишем первое уравнение из системы (21.3) для квазистационарного поля в веществе:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Данное соотношение выражает закон электромагнитной индукции: изменения магнитного поля во времени порождают вихревое электрическое поле. В проводящей среде это наведенное электрическое поле вызовет движение зарядов — возникнет индукционный ток. Магнитное поле действует как источник тока и может быть охарактеризовано соответствующей ЭДС.

Как показано в § 2, п. 2.2, исследуемое уравнение может быть представлено в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Вклад в интеграл дает только вихревая составляющая вектора  $\vec{E}$ . *Циркуляция напряженности для вихревой составляющей электрического поля носит название электродвижущей силы индукции.*

Итак, в проводящей среде под действием переменного магнитного поля возникают ЭДС индукции и индукционный ток, линии вектора  $\vec{j}$  для которого совпадают с линиями вектора напряженности вихревого электрического поля. Особенно важен для технических приложений замкнутый линейный проводник, помещенный в переменное магнитное поле. Контур интегрирования следует совмещать с контуром проводника. ЭДС в таком случае относится к данному проводнику.

Следует заметить, что формула закона Фарадея

$$\mathcal{E}_{\text{ина}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (21.8)$$

сейчас записана для неподвижного проводника. Предполагается, что магнитный поток  $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$  изменяется с течением времени только в силу изменения вектора  $\vec{B}$ . Но проводник или его части могут двигаться в пространстве, и по этой причине также может изменяться магнитный поток, пронизывающий контур проводника. Поэтому важно установить, чем сопровождается движение проводника в магнитном поле.

Рассмотрим свободные заряды в проводнике, движущемся в постоянном магнитном поле со скоростью  $\vec{v}$ . Заряды вовлекаются проводником в упорядоченное движение со скоростью движения участков проводника; на заряды действует магнитная составляющая силы Лоренца

$$\vec{F} = q [\vec{v}\vec{B}]$$

Относя силу к величине заряда, получаем некоторое эффективное электрическое поле с напряженностью

$$\vec{E}_{\text{эф}} = [\vec{v}\vec{B}].$$

Следовательно, и в постоянном магнитном поле при движении проводника в нем возбуждается ЭДС:

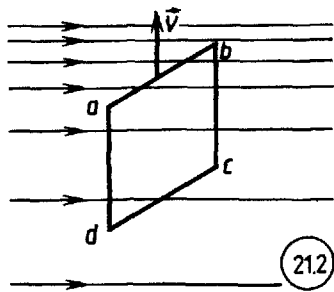
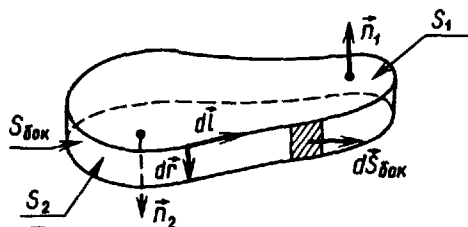
$$\mathcal{E}_{\text{ина}} = \oint_L [\vec{v}\vec{B}] d\vec{l}. \quad (21.9)$$

Дальнейшие рассуждения и преобразования выполним с помощью рисунка 21.1. Если элемент проводника  $d\vec{l}$  сместился за время  $dt$  на отрезок  $d\vec{r}$ , то  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , а вместо формулы (21.9) получим

$$\mathcal{E}_{\text{ина}} = \frac{1}{dt} \oint_L [d\vec{r}\vec{B}] d\vec{l} = \frac{1}{dt} \oint_L [d\vec{l} d\vec{r}] \vec{B} = - \frac{1}{dt} \oint_{S_{\text{бок}}} \vec{B} d\vec{S},$$

где  $S_{\text{бок}}$  — поверхность, описанная в пространстве контуром тока за время  $dt$ .

Вычислим поток индукции через замкнутую поверхность тела, образованного поверхностями, стягивающими проводник в моменты  $t$  и  $t + dt$  (основания) и описанной проводником при движении



211

212

(боковая). Так как поток вектора индукции  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю, то

$$\int_{S_1} \vec{B} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} d\vec{S} + \int_{S_{бок}} \vec{B} d\vec{S} = 0,$$

отсюда

$$-\int_{S_{бок}} \vec{B} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} d\vec{S}.$$

Выбирая положительное направление нормалей к поверхностям, как указано на рисунке, и пользуясь выражением для  $\mathcal{E}_{инд}$ , имеем

$$\mathcal{E}_{инд} = \frac{1}{dt} [\Phi(t) - \Phi(t + dt)] = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где  $\Phi(t)$  — поток индукции через поверхность, стягивающую контур в момент времени  $t$ .

При выводе этой формулы имелось в виду, что поток вектора  $\vec{B}$  через контур проводника изменяется вследствие движения всего контура, а также его отдельных частей, т. е. изменения формы и размеров контура. Это можно отразить в обозначениях:

$$\mathcal{E}_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (21.10)$$

(В отличие от формулы (21.8) здесь использован знак полной производной по времени.)

Таким образом, ЭДС индукции возникает как в движущемся проводнике, так и в неподвижном, хотя причина изменения потока индукции в этих двух случаях неодинакова.

С точки зрения наблюдателя в некоторой инерциальной системе отсчета, на основании исходных положений электродинамики явление электромагнитной индукции в неподвижном проводнике описывается первым уравнением системы Максвелла и по своей природе обусловлено возникновением вихревого электрического поля при изменении магнитного  $B$  в движущемся же проводнике ЭДС индукции обусловлена действием силы Лоренца на электрические заряды.

Сопоставим формулы (21.8) и (21.10), опираясь на релятивистские преобразования векторов поля. Замкнутый контур с постоянной скоростью  $\vec{v}$  ( $v \ll c$ ) движется поступательно в неоднородном магнитном поле. Из рисунка 21.2 видно, что отрезки проводника пересекают линии магнитного поля. Свяжем с контуром штрихованную систему отсчета. Согласно формулам преобразования векторов поля (13.5) в штрихованной системе имеет место электрическое поле с напряженностью

$$\vec{E}' = [\vec{v}\vec{B}].$$

Циркуляция напряженности  $\vec{E}'$  по контуру проводника и есть ЭДС индукции.

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint_L [\vec{v}\vec{B}] \cdot d\vec{l}.$$

Такую же ЭДС согласно формуле (21.9) фиксирует и наблюдатель в нештрихованной системе, где проводник движется. Однако наблюдатели в разных системах относят возникновение ЭДС к разным причинам: наблюдатель в штрихованной системе — к вихревому электрическому полю, а наблюдатель в нештрихованной — к силе Лоренца. По условиям задачи в нерелятивистском приближении изменение магнитного потока  $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)$ , вызванное движением проводника в нештрихованной ИСО, и изменение магнитного потока  $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t'}\right)$ , происходящее в штрихованной ИСО вследствие изменения индукции поля, равны друг другу, т. е.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi'}{\partial t'}.$$

Таким образом объясняется совпадение формулировок закона электромагнитной индукции для этих двух случаев.

Часто пишут одну общую формулу, имея в виду обе причины изменения потока индукции магнитного поля через замкнутый контур проводника. Вид общей формулы совпадает с формулой (21.10).

Обратимся теперь к системе проводников, связанных магнитным взаимодействием, т. е. общим магнитным полем. Согласно формуле (20.20) поток, пронизывающий контур  $i$ -го проводника равен:

$$\Phi_i = \sum_k L_{ik} I_k.$$

Он зависит от силы тока в этом и других проводниках, от формы, размеров, взаимного расположения проводников в пространстве. При изменении всех этих факторов возникает ЭДС индукции. В общем случае

$$\mathcal{E}_{\text{инд}}^{(i)} = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\sum_k \frac{dL_{ik}}{dt} I_k - \sum_k L_{ik} \frac{dI_k}{dt}. \quad (21.11)$$

Практически важен частный случай, когда изменяются токи, а коэффициенты  $L_{ik}$  неизменны. Тогда

$$\mathcal{E}_{\text{инд}}^{(i)} = \sum_k L_{ik} \frac{dI_k}{dt}. \quad (21.11\text{-a})$$

Для одного (уединенного) неподвижного проводника говорят о явлении самоиндукции, которое состоит в возбуждении индукционной ЭДС и индукционного тока в цепи при любых изменениях силы тока в ней. ЭДС самоиндукции находится по формуле

$$\mathcal{E}_{\text{ина}} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (21.11-6)$$

Направление тока самоиндукции таково, что он препятствует изменению тока, его вызвавшего. (Переменные токи обладают, таким образом, свойством, напоминающим инертность тел.)

**Пример 21.1 Вывод интегрального закона Ома для замкнутого проводника, находящегося в переменном магнитном поле.**

Воспользуемся дифференциальной формулой (21.5)

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}).$$

Напряженность поля  $\vec{E}$  определяется системой уравнений (21.3) для квазистационарного поля, поэтому расчет и его результат отличаются от рассмотренного ранее для постоянного тока.

Интегрируя равенство (21.5) по замкнутому контуру, получаем

$$\oint_L \frac{\vec{j} d\vec{l}}{\gamma} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} + \oint_L \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} \quad (1)$$

Так как теперь  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  и не равен нулю, как в стационарном поле, первый интеграл в правой части не обращается в нуль. Для его вычисления используем формулу

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

После подстановки этого выражения имеем

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_L \vec{A} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Остальные члены в равенстве (1) преобразуются так же, как это было сделано в § 19, п. 19.4. В итоге приходим к закону Ома для замкнутого контура в переменном магнитном поле:

$$IR = \mathcal{E}_{\text{ст}} - \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

**Пример 21.2. Расчет токов для системы замкнутых проводников с переменным током.**

Имеется несколько неподвижных замкнутых линейных проводников. Они связаны в единую систему общим для них квазистационарным электромагнитным полем. Изменения магнитного поля порождают индукционную ЭДС и индукционные токи в проводниках, те в свою очередь влияют на поле и т. д. Эти процессы можно описать, используя закон Ома, найденный в предыдущем примере. Для отдельного контура

$$I_k R_k = \mathcal{E}_{\text{ст}}^k - \frac{\partial \Phi_k}{\partial t}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Ток в каждом контуре оказывается зависящим от изменения тока в нем и в остальных контурах. Последнее становится особенно наглядным, если использовать формулу (21.11-а), выражающую поток индукции через изменения токов в цепях. После подстановки имеем

$$I_k R_k = \mathcal{E}_{\text{ст}}^k - \sum_{i=1}^N L_{ik} \frac{dI_i}{dt}. \quad (21.12)$$

Таким образом, при заданных ЭДС и параметрах контуров  $R_k$ ,  $L_{ik}$ , а также при заданных начальных значениях силы тока все токи могут быть определены в любой момент времени из уравнений (21.12).



Уравнения (21.12) являются основой для расчета квазистационарных процессов в цепях переменного тока в электротехнике и радиотехнике.

### Пример 21.3. Ток в квазизамкнутой цепи с переменной ЭДС.

Для электротехники и радиотехники важен случай цепи, содержащей конденсатор с емкостью  $C$  и дроссель с индуктивностью  $L$ . (Емкость конденсатора  $C$  и индуктивность катушки  $L$ , точнее, коэффициент самоиндукции, могут значительно превосходить эти параметры в других частях цепи. Данные свойства считаются «сконцентрированными» в конденсаторе и дросселе.)

Цепь, по существу, конденсатором разорвана, однако благодаря увеличению и уменьшению заряда на обкладках конденсатора это не мешает возникновению колебаний силы тока в остальной части цепи. Поэтому цепь уподобляется замкнутому контуру.

Проинтегрируем уравнение  $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{ст})$  вдоль всей цепи от одной обкладки конденсатора до другой:

$$\int_1^2 \frac{\vec{j} \vec{dl}}{\gamma} = \int_1^2 \vec{E} \vec{dl} + \int_1^2 \vec{E}_{ст} \vec{dl} \quad (1)$$

Интеграл в левой части равенства приводится к произведению  $IR$  (см. § 19, п. 19.4). Второй интеграл в правой части есть ЭДС. Первый интеграл разобьем на два слагаемых, используя формулу (21.7)

$$\int_1^2 \vec{E} \vec{dl} = - \int_1^2 \text{grad } \varphi \vec{dl} - \int_1^2 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \vec{dl}.$$

Вычислим первое слагаемое в правой части:

$$\int_1^2 \text{grad } \varphi \vec{dl} = \int_1^2 d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{Q}{C},$$

где  $Q$  — заряд конденсатора, а  $C$  — его емкость. Учитывая также, что геометрически разрыв цепи конденсатора мал по сравнению со всей протяженностью цепи, для второго слагаемого имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 \vec{A} \vec{dl} \approx \frac{\partial \Phi}{\partial t} = L \frac{dI}{dt}.$$

Подставим найденные выражения в (1). Получаем

$$IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_{ст}. \quad (2)$$

Продифференцируем уравнение (2) по времени и учтем равенство

$$\frac{dQ}{dt} = I,$$

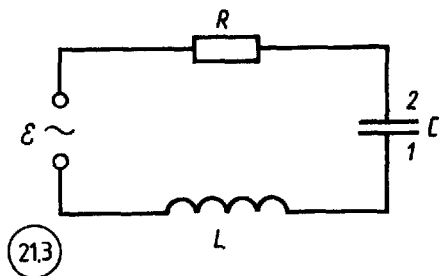
вытекающее из определения силы тока.

Окончательно получаем

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{ст}. \quad (21.13)$$

Полезно заметить, что знак разности потенциалов соответствует знаку заряда на верхней обкладке конденсатора (рис 21.3). А это означает, что положительный ток в цепи идет от точки (1) к точке (2) и увеличивает заряда на второй обкладке.

Уравнение (21.13) является исходным для всех расчетов в цепях переменного тока С его помощью рассчитывается, например, процесс, происходящий в колебательном контуре, выводится закон Ома для цепи переменного тока при наличии в ней емкости и индуктивности, исследуются резонансы токов и напряжений и т. д.



## § 22. Расчет тока в нелинейном проводнике. Скин-эффект

Скин-эффект состоит в повышении плотности переменного тока при приближении к поверхности проводника, по которому течет ток. Это явление имеет существенное значение при передаче электрической энергии по проводам: не все сечение провода используется одинаково эффективно. Следует заметить, что явление выходит за рамки линейной модели тока, так как плотность тока неодинакова на всем сечении.

Пусть проводящая однородная среда занимает полупространство  $y \geq 0$  (рис. 22.1). Уравнения квазистационарного поля в среде запишем в виде

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (22.1)$$

Продифференцируем первое из них по времени и заменим с помощью второго производную  $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  в полученном выражении. Имеем

$$-\frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Учитывая тождество (П. II, 27), а также условие  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ , получаем

$$\Delta \vec{E} = \gamma\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (22.2)$$

Точно так же можно показать, что

$$\Delta \vec{H} = \gamma\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (22.3)$$

Введем ток, текущий параллельно оси  $Ox$  во всем полупространстве, где  $y \geq 0$ :

$$j_x = j_x(y, t), \quad j_y = 0, \quad j_z = 0.$$