

§ 22. Расчет тока в нелинейном проводнике. Скин-эффект

Скин-эффект состоит в повышении плотности переменного тока при приближении к поверхности проводника, по которому течет ток. Это явление имеет существенное значение при передаче электрической энергии по проводам: не все сечение провода используется одинаково эффективно. Следует заметить, что явление выходит за рамки линейной модели тока, так как плотность тока неодинакова на всем сечении.

Пусть проводящая однородная среда занимает полупространство $y \geq 0$ (рис. 22.1). Уравнения квазистационарного поля в среде запишем в виде

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (22.1)$$

Продифференцируем первое из них по времени и заменим с помощью второго производную $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ в полученном выражении. Имеем

$$-\frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot rot } \vec{E} = \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Учитывая тождество (П. II, 27), а также условие $\text{div } \vec{E} = 0$, получаем

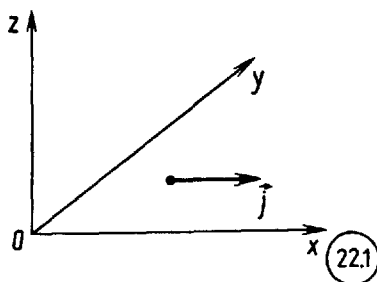
$$\Delta \vec{E} = \gamma\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (22.2)$$

Точно так же можно показать, что

$$\Delta \vec{H} = \gamma\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (22.3)$$

Введем ток, текущий параллельно оси Ox во всем полупространстве, где $y \geq 0$:

$$j_x = j_x(y, t), \quad j_y = 0, \quad j_z = 0.$$



j_x зависит только от y в силу симметрии задачи; в плоскости, параллельной xOz , все точки равноправны.

Соответственно

$$E_x = E_x(y, t), E_y = 0, E_z = 0.$$

Уравнение (22.2) переходит в более простое:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \gamma \mu \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (22.4)$$

Ищем решение уравнения (22.4) в виде

$$E_x = E_{0x} e^{i\omega t}.$$

Подстановка пробного решения приводит к уравнению для амплитуды:

$$\frac{d^2 E_{0x}}{dy^2} = i\omega \gamma \mu \mu_0 E_{0x}. \quad (22.5)$$

Его следует решать с помощью составления характеристического уравнения, причем удобно ввести обозначение:

$$\frac{1}{l^2} = \frac{1}{2} \gamma \mu \mu_0 \omega.$$

Получаем

$$k^2 = \frac{2l}{l^2}.$$

Характеристическое уравнение имеет два комплексных корня:

$$k_{1,2} = \pm \frac{1}{l} \sqrt{2i} = \pm \frac{1}{l} (1 + i).$$

Сейчас можно записать общее решение уравнения (22.5):

$$E_{0x} = C_1 e^{\frac{y}{l}} e^{i \frac{y}{l}} + C_2 e^{-\frac{y}{l}} e^{-i \frac{y}{l}}.$$

Первое слагаемое лишено физического смысла из-за неограниченного роста напряженности поля по мере углубления в проводник. Остается

$$E_{0x} = C_2 e^{-\frac{y}{l}} e^{-i \frac{y}{l}}. \quad (22.6)$$

Соответственно напряженность электрического поля и плотность тока изменяются по закону

$$E_x = E_0 e^{-\frac{\gamma}{l}} e^{i(\omega t - \frac{\gamma}{l} l)}; \quad (22.6-a)$$

$$j_x = j_0 e^{-\frac{\gamma}{l}} e^{i(\omega t - \frac{\gamma}{l} l)}, \quad (22.7)$$

где $E_0 = C_2$; $j_0 = \gamma C_2$.

Величины $E_x(y, t)$ и $j_x(y, t)$ уменьшаются при удалении от поверхности в глубь проводника. Чем выше частота тока (а также больше параметры γ и μ), тем быстрее убывает ток. Он ослабевает в e раз (т. е. примерно в 3 раза) на глубине l . Эта постоянная дает количественную меру скин-эффекта.

Из формул (22.6) и (22.7) также видно, что процесс проникновения тока и электрического поля в глубь проводящей среды имеет характер затухающих с глубиной волн. Обычно амплитуда волны настолько быстро уменьшается с ростом y , что волновой характер решения не имеет существенного значения. Так, для меди при частоте 50 Гц $l \approx 1$ см, а при $\omega = 10^5$ Гц $l \sim 10^{-3}$ см. Эти расстояния значительно меньше длины волны.

Напряженность магнитного поля можно найти с помощью уравнений (22.1) по известной напряженности электрического поля. Векторы \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны друг другу. Магнитное поле затухает при углублении в проводящую среду по тому же закону, что и электрическое.

Методические указания и рекомендации

1. Квазистационарные процессы довольно подробно изучаются в курсе общей физики и в курсе электротехники. Задача курса теоретической физики – выявить их связь с общими вопросами электродинамики, получить основные соотношения из уравнений Максвелла.

В настоящей главе внимание сосредоточено на квазистационарном поле и явлении электромагнитной индукции в линейных проводниках. Остальное (иллюстрации общих положений, выходы в электротехнику) отнесено к примерам расчетов по соответствующим формулам и уравнениям. Они предназначены для самостоятельной работы студентов.

II. При изучении главы полезно обратить внимание на следующие моменты. Обдумайте подходы к явлению электромагнитной индукции в курсе физики средней школы, общей физики. Установите связь знака «минус» в формуле Фарадея с правилом Ленца.

Установите соотношение направлений векторов \vec{E} и $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ при электромагнитной индукции в однородном проводнике, заполняющем все пространство. Выполните упражнения.