

8. Изучить превращения энергии при замыкании и размыкании цепи переменного тока, содержащей индуктивность и емкость, пользуясь результатами предыдущих задач.

Глава IX

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВЕЩЕСТВЕ

В вещественной среде существуют не только стационарные и квазистационарные поля, но и распространяются электромагнитные волны. В последней главе курса проанализированы особенности электромагнитных волн в веществе.

Свет по своей макроскопической природе — электромагнитная волна. Ниже показано, как некоторые исходные положения оптики раскрываются на основе теории Максвелла.

§ 23. Электромагнитные волны в веществе

23.1. Плоские волны в идеальном диэлектрике. Допустим, что пространство заполняет однородный диэлектрик с постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ и проводимостью, равной нулю ($\gamma = 0$). Такая модель диэлектрика уже использовалась при изучении стационарных процессов, и она достаточно точно отображает реальные свойства сред в стационарных полях. В случае переменных полей, особенно при высоких частотах колебаний, указанные допущения оказываются слишком грубыми. Тем не менее с помощью этой простой модели удастся получить многие важнейшие качественные заключения об электромагнитных, в частности световых, волнах в веществе.

Воспользуемся уравнениями поля в потенциалах для однородного диэлектрика (16.3). При отсутствии свободных зарядов применяется волновая калибровка: $\varphi = 0$, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ (см. § 9, п. 9.2). Уравнения приобретают вид

$$\Delta \vec{A} - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0; \quad (23.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (23.2)$$

Общее решение волнового уравнения (23.1) можно представить в виде суперпозиции гармоник всевозможных частот и направлений распространения. Отдельная гармоника есть плоская монохроматическая волна:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\vec{k} \vec{r} - \omega t). \quad (23.3)$$

Она отличается от таких же по форме волн в вакууме скоростью распространения. По виду уравнения (23.1) заключаем, что в среде фазовая скорость волны равна:

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (23.4)$$

где c — фазовая скорость электромагнитных волн в вакууме.

Соответственно изменяется соотношение между волновым числом k и циклической частотой ω . Если для вакуума выполнялось равенство $k = \frac{\omega}{c}$, то теперь для волн в веществе

$$k = \frac{\omega}{c'} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{c}. \quad (23.5)$$

К векторам поля \vec{E} и \vec{B} перейдем с помощью формул их связи с потенциалами:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

Все вычисления совершенно аналогичны выкладке в § 9, п. 9.2. Получим для волны в диэлектрике

$$\vec{E} = -\omega \vec{A}_0 \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t), \quad \vec{B} = [\vec{A}_0 \vec{k}] \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t). \quad (23.6)$$

Условие (23.2) дает $\vec{A}_0 \perp \vec{k}$, а с учетом формул (23.6) далее следуют поперечность электромагнитных волн в веществе, правило правой тройки для последовательности векторов \vec{E} , \vec{B} , \vec{k} , связь между модулями векторов поля:

$$B = \frac{E}{c'}. \quad (23.7)$$

Последнее соотношение приобретает симметричную форму, если его записать для модулей векторов \vec{E} и \vec{H} :

$$H \sqrt{\mu\mu_0} = E \sqrt{\epsilon\epsilon_0}. \quad (23.8)$$

Из формул (23.6) также видно, что векторы \vec{E} и \vec{B} изменяются во времени синфазно.

В идеальном диэлектрике ϵ не зависит ни от величины напряженности поля \vec{E} , ни от его частоты ω . Поэтому фазовая скорость распространения волн в среде не зависит от частоты и равна групповой скорости (см. пример 9.1). Говорят, что идеальная среда, как и вакуум, не обладает дисперсией. Однако опыт свидетельствует о зависимости распространения электромагнитных волн от частоты, что объясняется в соответствии с формулой (23.4) зависимостью диэлектрической проницаемости среды от частоты колебаний поля:

$$\epsilon = \epsilon(\omega).$$

(Для диэлектриков $\mu \approx 1$, и эту величину можно исключить из рассмотрения.)

Таким образом, реальные среды обладают дисперсией. Определяя волновое число для среды с дисперсией тем же соотношением (23.5), что и для идеального диэлектрика, получаем для произвольного волнового поля гармоники вида (23.6)

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t), \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t).\end{aligned}$$

По-прежнему векторы \vec{E} , \vec{B} и \vec{k} образуют правую тройку, причем $E = c' B$, но теперь скорость волн зависит от частоты:

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}.$$

Поэтому усложняется зависимость от частоты волнового вектора:

$$k = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{c}.$$

(Соответственно длина волны $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega \sqrt{\varepsilon(\omega)}}.$)

При наличии дисперсии групповая скорость (скорость волнового пакета или скорость переноса энергии) может заметно отличаться от фазовой скорости гармоник.

Вычислим плотность энергии и импульса волны в среде. Согласно общей формуле (16.22) имеем

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}).$$

С помощью равенства (23.8) получим

$$w = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 = \vec{E} \vec{D}, \quad (23.9)$$

или

$$w = \frac{B^2}{\mu \mu_0} = \vec{H} \vec{B}, \quad (23.10)$$

что свидетельствует о равном вкладе электрической и магнитной составляющей поля в энергию волны.

Плотность потока энергии определяется соотношением (16.23)

$$\vec{\sigma} = [\vec{E} \vec{H}].$$

Эта формула может быть записана в нескольких видах:

$$\vec{\sigma} = c' (\vec{E} \vec{D}) \vec{k}_0 = c' (\vec{H} \vec{B}) \vec{k}_0 = c' w \vec{k}_0, \quad (23.11)$$

где $\vec{k}_0 = \frac{\vec{k}}{k}$.

Обратимся теперь к импульсу волн в веществе. Плотность импульса определяется формулой (16.26). Сопоставим выражение для плотности импульса

$$\vec{g} = [\vec{D}\vec{B}] \quad (23.12)$$

с формулой для плотности энергии и потока энергии. Векторы \vec{g} и $\vec{\sigma}$ имеют одинаковое направление. С помощью соотношений (23.4) и (23.11) заключаем, что для их модулей справедливо равенство

$$\sigma = g(c')^2,$$

откуда следует

$$w = gc'. \quad (23.13)$$

В веществе релятивистское соотношение между энергией и импульсом $E = pc$ оказалось нарушенным, ибо в формулу (23.13) вместо c входит c' . Чтобы его сохранить, иногда определяют плотность импульса электромагнитного поля в веществе не соотношением (23.12), а соотношением

$$\vec{g} = \frac{[\vec{D}\vec{B}]}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (23.14)$$

Теперь, как это нетрудно подсчитать, $w = gc$ в соответствии с теорией относительности. Однако в таком случае теряется связь между импульсом и потоком энергии: энергия переносится со скоростью c' , а импульс соответствует движению энергии со скоростью c .

По указанной причине считают, что нельзя однозначно определить импульс электромагнитного поля в рамках феноменологической модели вещества, отраженной в материальных уравнениях

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma\vec{E}.$$

23.2.* Электромагнитные волны в однородной проводящей среде. Рассмотрим вопрос о распространении электромагнитных волн в проводящей среде, т. е. при условии $\gamma \neq 0$. Будем, как и в других случаях, опираться на уравнения поля в потенциалах, для того чтобы использовать их готовые решения. Уравнения (16.3) для векторного потенциала поля совместно с материальным уравнением для зависимости плотности тока в среде от проводимости $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ приводит к следующему исходному для поставленной задачи уравнению:

$$\Delta\vec{A} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\gamma\mu\mu_0\vec{E}. \quad (23.15)$$

Объемные заряды в проводниках отсутствуют. Поэтому при-

меним волновую калибровку потенциала. Если $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, то уравнение (23.15) примет вид

$$\Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \gamma\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0. \quad (23.16)$$

Ищем решение уравнения (23.16), совпадающее по форме с плоскими волнами, распространяющимися вдоль оси Ox :

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\omega t - qx)}. \quad (23.17)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (23.16) приводит к равенству

$$-q^2 + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - i\gamma\mu\mu_0\omega = 0.$$

Таким образом, модуль волнового вектора q в предлагаемом решении оказался комплексным числом:

$$q^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \omega^2 - i\omega\gamma\mu\mu_0. \quad (23.18)$$

Чтобы выяснить физический смысл соответствующей волны, выделим в комплексном q действительную и мнимую части:

$$q = a - ib.$$

Возведя последнее равенство в квадрат и сравнивая с уравнением (23.18), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \omega^2, \\ ab = \frac{1}{2} \omega\gamma\mu\mu_0. \end{cases}$$

Решая систему относительно a и b , имеем

$$b = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{2c^2} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\mu\omega\gamma c^2}{\varepsilon\omega} \right)^2} \right]} = \pm s; \quad (23.19)$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{2c^2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\mu\omega\gamma c^2}{\varepsilon\omega} \right)^2} \right]} = \pm k, \quad (23.20)$$

откуда $q = \pm (k - is)$, а решение для потенциала поля в проводнике таково:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{\pm sx} e^{i(\omega t - kx)}.$$

Это волна с вещественным волновым вектором k и переменной вдоль луча амплитудой. Поскольку физического смысла неограниченно растущая амплитуда не имеет, то при $x \geq 0$ используется

только решение со знаком «минус» перед s . Окончательно для волны потенциала, распространяющейся в положительном направлении оси Ox , имеем

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-sx} e^{i(\omega t - kx)}. \quad (23.21)$$

Отсюда видно, что волна в проводящей среде затухает. Затухание характеризуется параметром s , зависящим от свойств среды и частоты волны. Для всех веществ, в которых предположение о постоянстве ϵ и μ имеет смысл, $\mu \approx 1$. Поэтому коэффициент затухания s определяется диэлектрической постоянной ϵ и проводимостью среды γ . При низких частотах $s \approx \sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu \mu_0 \gamma}$. Этот параметр уже полу-

чен в задаче о скин-эффекте (§ 22). (Связь явлений распространения волн в проводящей среде и скин-эффекта как соответствующего предельного случая очевидна.)

Если среда является хорошим проводником, то затухание так велико, что о распространении волн в ней говорить не приходится. Количественная оценка для металлов с помощью формулы (23.19) показывает, что для частот видимого света амплитуда волн уменьшается в e раз на отрезке $\Delta x = \frac{1}{s} \sim 10^{-8}$ м, т. е. на расстояниях, много меньших длины волны. Это значит, что волны в проводнике не распространяются.

При падении электромагнитной волны на поверхность проводника происходит поглощение и отражение. Переменное электромагнитное поле возбуждает токи в очень тонком ($\sim \frac{1}{s}$) поверхностном слое проводника, а с их помощью генерируется отраженная или рассеянная волна, часть падающей энергии переходит в джоулево тепло. На этом свойстве проводников основано экранирование от электромагнитных волн с помощью металлических оболочек, футляров, кожухов.

Как показывает формула (23.20), в среде имеет место зависимость волнового вектора k от проводимости γ и диэлектрической проницаемости ϵ , носящая название *дисперсии проводящей среды*. Дисперсия приводит к зависимости скорости распространения волн (а значит, и показателя преломления проводящей среды) от частоты. В соответствии с формулой (23.21) в среде

$$c' = \frac{\omega}{k(\omega)} \quad (23.22)$$

функция $k(\omega)$ задана соотношением (23.20).

Рассмотрим сначала предельный случай идеального диэлектрика ($\gamma = 0$).

Из формулы (23.20) получим

$$k = \frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}{c}.$$

Подставляя найденное значение k в формулу (23.22), имеем

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \quad (23.23)$$

в полном соответствии с данными § 23, п. 23.1.

Теперь обратимся к слабопроводящей среде с малой, но отличной от нуля проводимостью и выполним оценку для k . Считая y малой величиной, с помощью формулы (23.20) имеем

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \left(1 + \frac{\mu_0^2 y^2 c^4}{4\epsilon^2 \omega^2} \right). \quad (23.24)$$

Как и ожидалось, волновой вектор и скорость волн в проводящей среде оказались зависящими от частоты колебаний и проводимости среды. Имеет место дисперсия проводящей среды.

Определим также характер волн для векторов поля в слабопроводящей среде, для чего найдем векторы поля через потенциал (23.21). При волновой калибровке

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -i\omega \vec{A}_0 e^{-sx} e^{i(\omega t - kx)}, \\ \vec{B} &= \text{rot } \vec{A} = (s + ik) [\vec{A}_0 \vec{k}_0] e^{-sx} e^{i(\omega t - kx)}. \end{aligned}$$

Для того чтобы придать этим выражениям удобный для анализа вид, необходимо записать комплексные множители $i\omega$ и $s + ik$ в экспоненциальной форме, т. е. выделить вещественные амплитуды волн. Поскольку

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \arctg \frac{b}{a}}, \quad i\omega = \omega e^{i \frac{\pi}{2}},$$

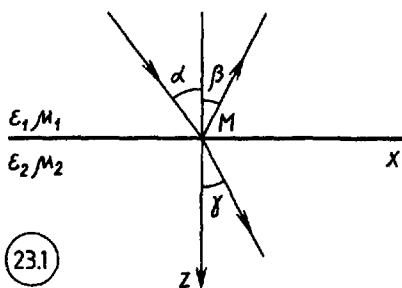
то

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\omega \vec{A}_0 e^{-sx} e^{i(\omega t - kx + \frac{\pi}{2})}, \\ \vec{B} &= \sqrt{s^2 + k^2} [\vec{A}_0 \vec{k}_0] e^{-sx} e^{i(\omega t - kx + \arctg \frac{k}{s})}. \end{aligned} \quad (23.25)$$

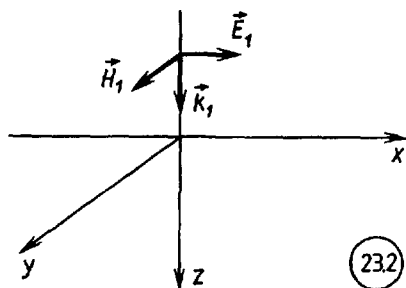
Формулы (23.25) показывают, что в слабопроводящем веществе имеют место затухающие плоские волны со сдвигом фаз между колебаниями векторов \vec{E} и \vec{B} и с измененным по сравнению с вакуумом соотношением между их модулями. Но по-прежнему волны поперечны, векторы \vec{E} , \vec{B} и \vec{k} составляют правую тройку.

23.3. Отражение и преломление электромагнитных волн на границе двух диэлектриков. В рамках классической электродинамики можно получить законы отражения и преломления электромагнитных волн на границе двух сред.

Выделим участок границы раздела, совпадающий с плоскостью Оху (рис. 23.1). Пусть плоская волна из первой среды падает на границу под некоторым углом α . Она частично проникает во вторую среду. Опыт подсказывает также наличие отраженной волны. Связь между этими тремя волнами содержится в граничных условиях,



(23.1)



(23.2)

вытекающих из уравнений Максвелла. Существенно, что уравнениям, выражающим граничные условия, можно удовлетворить, если рассматривать именно три волны: падающую, отраженную и преломленную.

Итак, задаваясь некоторой гармоникой для падающей волны, имеем

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_{10} e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega_1 t)}, \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{20} e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega_2 t)}, \\ \vec{E}_3 &= \vec{E}_{30} e^{i(\vec{k}_3 \vec{r} - \omega_3 t)} -\end{aligned}\quad (23.26)$$

электрические векторы падающей, отраженной и преломленной волн соответственно. Нужно найти связь между амплитудами, частотами колебаний ω_1 , ω_2 , ω_3 и волновыми векторами падающей (\vec{k}_1), отраженной (\vec{k}_2) и преломленной (\vec{k}_3) волн. Для этого воспользуемся непрерывностью тангенциальной составляющей поля (граничным условием (16.17)):

$$E_{1t} + E_{2t} = E_{3t}. \quad (23.27)$$

Проанализируем соотношение (23.27) с учетом формул (23.26) в следующем порядке:

а) *Частота при отражении и преломлении не изменяется* Фиксируя некоторую точку на границе раздела, можно выделить одну временную зависимость в равенстве (23.27), записанном в проекции на некоторую ось:

$$Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_2 t} = Ce^{-i\omega_3 t}.$$

Это равенство должно выполняться тождественно при всех значениях t , что возможно лишь при условии

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3. \quad (23.28)$$

б) *Лучи падающий, отраженный и преломленный лежат в одной плоскости.* Разделив равенство (23.27) на общий временной множитель, получаем соотношение вида

$$ae^{i\vec{k}_1 \vec{r}} + be^{i\vec{k}_2 \vec{r}} = ce^{i\vec{k}_3 \vec{r}}.$$

Оно должно выполняться для всех точек границы раздела, что возможно лишь при условии

$$\vec{k}_1 \vec{r} = \vec{k}_2 \vec{r} = \vec{k}_3 \vec{r}. \quad (23.29)$$

Пусть $\vec{r} \perp \vec{k}_1$, тогда $\vec{r} \perp \vec{k}_2$ и $\vec{r} \perp \vec{k}_3$, откуда и следует, что векторы \vec{k}_1 , \vec{k}_2 и \vec{k}_3 лежат в одной плоскости.

в) *Законы отражения и преломления.* Плоскость векторов \vec{k}_1 , \vec{k}_2 , \vec{k}_3 совпадает с плоскостью Oxz (см. рис. 23.1). Выберем начало вектора \vec{r} на оси Ox . Из формулы (23.29) следует

$$k_1 \sin \alpha = k_2 \sin \beta = k_3 \sin \gamma.$$

Используя также связь между волновым вектором и частотой (см формулу (23.5)), имеем

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{v_1}, \quad k_3 = \frac{\omega}{v_2}. \quad (23.30)$$

Отсюда получаются законы отражения и преломления:

$$\alpha = \beta, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}. \quad (23.31)$$

Показатель преломления может быть выражен через диэлектрические характеристики вещества. При $\mu \approx 1$

$$n_{12} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \quad (23.32)$$

г) *Соотношения между амплитудами падающей, отраженной и преломленной волн.* Пусть волна падает перпендикулярно поверхности раздела (рис. 23.2), причем вектор \vec{E}_1 направлен по оси Ox . (Тогда вектор \vec{H}_1 направлен по оси Oy .) Используя свойства электромагнитных волн, запишем

$$E_{1x} = E_{10} e^{i(k_1 z - \omega t)}, \quad E_{1y} = E_{1z} = 0, \\ H_{1y} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_0}} E_{1x}, \quad H_{1x} = H_{1z} = 0.$$

Эти формулы определяют поле падающей волны. Для отраженной волны, распространяющейся в обратном направлении, имеем

$$E_{2x} = E_{20} e^{i(k_2 z + \omega t)}, \quad E_{2y} = E_{2z} = 0, \\ H_{2y} = -\sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_0}} E_{2x}, \quad H_{2x} = H_{2z} = 0.$$

Преломленная волна запишется в виде

$$E_{3x} = E_{30} e^{i(k_3 z - \omega t)}, \quad E_{3y} = E_{3z} = 0, \\ H_{3y} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_0}{\mu_0}} E_{3x}, \quad H_{3x} = H_{3z} = 0$$

Снова используем граничные условия. Исходя из непрерывности

тангенциальной составляющей вектора \vec{E} и тангенциальной составляющей вектора \vec{H} на плоскости $z = 0$ приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} E_{1,0} + E_{2,0} &= E_{3,0}, \\ \sqrt{\varepsilon_1} E_{1,0} - \sqrt{\varepsilon_2} E_{2,0} &= \sqrt{\varepsilon_2} E_{3,0}. \end{aligned}$$

Решая систему, находим

$$E_{2,0} = \frac{1 - n_{1,2}}{1 + n_{1,2}} E_{1,0}, \quad E_{3,0} = \frac{2}{1 + n_{1,2}} E_{1,0} \quad (23.33)$$

Это и есть формулы связи амплитудных значений векторов поля при отражении и преломлении волн (при нормальном падении). С их помощью нетрудно сравнить интенсивности трех волн, а также найти поток энергии отраженной и преломленной волн. Соответствующие соотношения (для произвольного угла падения) были получены в начале XIX века Френелем на основании предположения о волновой природе света, когда об электромагнитных волнах еще ничего не было известно.

Более подробный анализ условий прохождения волны через границу раздела двух сред позволяет получить и другие важные сведения. Так, граничные условия приводят к совпадению фаз падающей волны и преломленной, тогда как отражение в зависимости от параметров сред и величины угла падения может произойти как в той же фазе, так и в противоположной. Удастся также установить связь между составляющими поля при отражении и преломлении, имеющими разные поляризации, т. е. разные направления вектора \vec{E} .

§ 24. Электромагнитная природа света

24.1. Свет – электромагнитные волны. Свет с макроскопической точки зрения представляет собой электромагнитные волны в вакууме или веществе, частота которых порядка $10^{14} \dots 10^{15}$ Гц. Установление тождественности природы света и электромагнитного поля было осуществлено исследованиями Фарадея, Максвелла, Герца, Лебедева и других ученых и явилось одним из важнейших достижений физики XIX века. До работ Фарадея и Максвелла электромагнитные и оптические явления считались совершенно независимыми. Электромагнитная природа света была предсказана Фарадеем и выявлена Максвеллом и Герцем в связи с волновыми решениями основных уравнений электродинамики. Изучая различные вопросы электродинамики, мы многократно имели дело с принципиальными для оптики проблемами. Так, найдено решение волнового уравнения в виде плоских волн и теоретически установлена скорость распространения их в веществе и вакууме, рассмотрены гармонические составляющие электромагнитного поля, соответствующие свету определенных частот, показана возможность представления любого волнового