

тангенциальной составляющей вектора  $\vec{E}$  и тангенциальной составляющей вектора  $\vec{H}$  на плоскости  $z = 0$  приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} E_{1,0} + E_{2,0} &= E_{3,0}, \\ \sqrt{\varepsilon_1} E_{1,0} - \sqrt{\varepsilon_2} E_{2,0} &= \sqrt{\varepsilon_2} E_{3,0}. \end{aligned}$$

Решая систему, находим

$$E_{2,0} = \frac{1 - n_{1,2}}{1 + n_{1,2}} E_{1,0}, \quad E_{3,0} = \frac{2}{1 + n_{1,2}} E_{1,0} \quad (23.33)$$

Это и есть формулы связи амплитудных значений векторов поля при отражении и преломлении волн (при нормальном падении). С их помощью нетрудно сравнить интенсивности трех волн, а также найти поток энергии отраженной и преломленной волн. Соответствующие соотношения (для произвольного угла падения) были получены в начале XIX века Френелем на основании предположения о волновой природе света, когда об электромагнитных волнах еще ничего не было известно.

Более подробный анализ условий прохождения волны через границу раздела двух сред позволяет получить и другие важные сведения. Так, граничные условия приводят к совпадению фаз падающей волны и преломленной, тогда как отражение в зависимости от параметров сред и величины угла падения может произойти как в той же фазе, так и в противоположной. Удастся также установить связь между составляющими поля при отражении и преломлении, имеющими разные поляризации, т. е. разные направления вектора  $\vec{E}$ .

## § 24. Электромагнитная природа света

**24.1. Свет – электромагнитные волны.** Свет с макроскопической точки зрения представляет собой электромагнитные волны в вакууме или веществе, частота которых порядка  $10^{14} \dots 10^{15}$  Гц. Установление тождественности природы света и электромагнитного поля было осуществлено исследованиями Фарадея, Максвелла, Герца, Лебедева и других ученых и явилось одним из важнейших достижений физики XIX века. До работ Фарадея и Максвелла электромагнитные и оптические явления считались совершенно независимыми. Электромагнитная природа света была предсказана Фарадеем и выявлена Максвеллом и Герцем в связи с волновыми решениями основных уравнений электродинамики. Изучая различные вопросы электродинамики, мы многократно имели дело с принципиальными для оптики проблемами. Так, найдено решение волнового уравнения в виде плоских волн и теоретически установлена скорость распространения их в веществе и вакууме, рассмотрены гармонические составляющие электромагнитного поля, соответствующие свету определенных частот, показана возможность представления любого волнового

поля в виде совокупности гармоник, т. е. теоретически обосновано спектральное разложение света, и т. д. Затрагивались и вопросы взаимодействия света с веществом, так как изучалось рассеяние волн. Прямое отношение к оптике имеют эффект Доплера, абберация электромагнитных волн и ряд других вопросов электродинамики. Изучались также прохождение волн через вещество, явления отражения и преломления, дисперсия света.

Однако естественное световое поле имеет в связи со своим происхождением специфические особенности, не рассматривавшиеся нами ранее, при изучении общих положений электродинамики. Выявление их также входит в вопрос о природе света.

**24.2. Световое поле.** Уравнения Максвелла для пустоты и однородного диэлектрика приводят к общему решению в виде суперпозиции плоских монохроматических волн всевозможных частот и направлений. Суперпозицией сферических волн всевозможных частот является решение для точечных источников. К особому рода сферическим волнам (с амплитудой, зависящей от направления) сводится излучение систем в дипольном приближении; это излучение также может быть разложено на гармоники.

Таким образом, исходным объектом для теоретического исследования света и световых явлений в рамках классической электродинамики являются плоские (или сферические) монохроматические электромагнитные волны. По своей природе источник света сводится к множеству отдельных атомов и молекул, испускающих электромагнитные волны без согласования друг с другом, т. е. свет представляет собой суперпозицию множества волн, исходящих от отдельных независимых источников. Благодаря высоким частотам колебаний и малым продолжительностям и интенсивностям отдельных составляющих экспериментально измеренные параметры излучения и действия света оказываются в оптике «усредненными» как по времени, так и в пространстве. Поэтому методы регистрации электромагнитных волн радиодиапазона оказываются неприменимыми к световым волнам.

Более того, отдельные акты излучения света атомами вещества и взаимодействия его с атомами имеют ярко выраженный квантовый характер и не описываются во всех деталях макроскопической электродинамикой. Световое поле в его макроскопических проявлениях есть усреднение сложноизменяющихся микрополей и усреднение квантовой картины взаимодействия фотонов и связанных в атомах электронов.

Некоторые важные детали такого усреднения удастся понять с помощью сравнительно простой математической модели суперпозиции микрополей. Поскольку интенсивность (поток энергии) пропорциональна квадрату напряженности поля  $\vec{E}$ , то для средней по времени интенсивности света, состоящего из монохроматических составляющих всевозможных частот и одного направления, имеем

$$\overline{E^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \sum_k E_{k0} \cos(\omega_k t - \varphi_k) \right\}^2 dt = \frac{1}{T} \sum_k \int_0^T E_{k0}^2 \cos^2(\omega_k t - \varphi_k) dt + \\ + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_k \sum_{k'} E_{k0} E_{k'0} \cos(\omega_k t - \varphi_k) \cos(\omega_{k'} t - \varphi_{k'}) dt.$$

Если между частотами отдельных колебаний  $\omega_k$  нет никакой связи, а изменение составляющих носит случайный характер (статистически независимы сдвиги фаз  $\varphi_k$  и амплитуды  $E_{0k}$ ), то все интегралы, для которых  $\omega_k \neq \omega_{k'}$ , обращаются в нуль и получается

$$\overline{E^2} = \sum_k E_{k0}^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_k t - \varphi_k) dt = \sum_k \frac{1}{2} E_{k0}^2. \quad (24.1)$$

Так как

$$\overline{E_k^2} = \frac{1}{2} E_{k0}^2,$$

то формула (24.1) имеет смысл равенства средней интенсивности поля сумме средних интенсивностей составляющих гармоник:

$$\overline{E^2} = \sum_k \overline{E_k^2}. \quad (24.2)$$

Это положение подтверждается экспериментально для так называемого «естественного» света, т. е. света, испускаемого, например, множеством атомов твердого тела при тепловом движении. В теоретическом плане формула (24.2) очень важна, так как из нее следует, что в пределах соответствующего ей определения интенсивности в оптике можно пользоваться понятием некоторой строго монохроматической волны, на самом деле являющейся усреднением очень сложной картины микрополя.

Закон сложения интенсивностей (24.2) справедлив только при статистически независимых составляющих. Рассмотрим выходящий за рамки этой формулы случай сложения двух монохроматических волн с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , между которыми сохраняется постоянная разность фаз ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ). Тогда выкладка, аналогичная проделанной выше, даст для суммарного поля выражение

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2} E_{1,0}^2 + \frac{1}{2} E_{2,0}^2 + \frac{2}{T} \int_0^T E_{1,0} E_{2,0} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \cos(\omega_2 t - \varphi_2) dt. \quad (24.3)$$

Интеграл в соотношении (24.3) не равен нулю, поэтому

$$\overline{E^2} \neq \overline{E_1^2} + \overline{E_2^2} \quad (24.4)$$

В соответствии с формулой (24.3) имеют место и объясняются с помощью волновой теории явления интерференции и дифракции света. Но стоит подчеркнуть, что сами интерферирующие световые волны, как правило, есть результат усреднения несогласованных волн, поэтому вопрос о когерентности таких двух источников вовсе не тривиален. Обеспечить постоянство разности фаз колебаний во

времени и пространстве для двух различных естественных источников практически невозможно, и интерференция осуществляется, как известно, при разделении светового пучка от одного источника на части. Однако для квантовых генераторов электромагнитных волн — лазеров, в которых процесс излучения множества атомов или молекул согласован, проблема когерентности может быть снята: складываются действительно монохроматические поля. Волны, излучаемые лазерами, могут быть когерентны и во времени, и пространственно (см. [18]).

В связи с вопросом о монохроматическом свете необходимо сделать еще одно замечание. Выше в курсе говорилось, что на практике монохроматические электромагнитные волны не встречаются. Близкие же по частоте волны образуют волновой пакет. Сказанное справедливо и для световых волн. Поскольку ограниченное во времени излучение не монохроматично, то в оптике чаще всего имеют дело с волновыми пакетами, имеющими ограниченную протяженность во времени и пространстве. Замена пакета гармоникой допустима лишь при определенных оговорках. При узком интервале частот берется гармоника с частотой, принадлежащей середине интервала. Кроме того, пространственная и временная протяженность пакета должна быть велика.

Электромагнитные волны по своей природе поляризованы. Учитывая сложную картину действия отдельных несогласованных излучателей, дающих естественный свет, необходимо сделать вывод о наличии всевозможных поляризаций для отдельных компонент поля (24.1). Выделяя два независимых направления поляризации  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  в плоскости, перпендикулярной лучу, получим

$$\vec{E} = \sum_k \{ \vec{e}_1 E_{0k} e^{i(\omega_k t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_k)} + \vec{e}_2 E_{0k} e^{i(\omega_k t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_k)} \}. \quad (24.5)$$

Из последней формулы вытекает, что следует говорить о сложности интенсивностей для каждого из двух направлений поляризации отдельно; причем для направления  $\vec{e}_1$  интенсивности складываются либо по формуле (24.2), либо по формуле (24.3). То же относится к направлению  $\vec{e}_2$ .

Приведенные в данном параграфе соображения о естественном свете позволяют в ряде случаев применить к световому полю законы и выводы классической электродинамики. Кроме рассмотренных выше положений, из уравнений Максвелла для вещества вытекает ряд важнейших для оптики законов, в том числе принцип Гюйгенса — Френеля. Таким образом, этот важнейший феноменологический принцип волновой теории получает в электродинамике теоретическое обоснование.

**24.3.\* Принцип Гюйгенса — Френеля.** Принцип Гюйгенса — Френеля является одним из наиболее общих и конструктивных принципов волновой оптики. С его помощью удастся теоретически вывести важные оптические законы отражения и преломления света,

дифракции и других явлений. Напомним содержание принципа. Пусть задан источник света  $L$ . В точке наблюдения  $M$  (рис. 24.1) имеют место колебания некоторой полевой величины (например, напряженности электрического поля), определяемые приходящей сюда сферической волной:

$$E(M) = \frac{a}{r'} e^{i(kr' - \omega t)}. \quad (24.6)$$

Окружим источник света замкнутой поверхностью  $S$ . Согласно принципу Гюйгенса – Френеля точечный источник может быть заменен этой поверхностью, если каждый ее элемент  $dS$  в свою очередь рассматривается как источник сферических волн. Поле в точке  $M$  определяется суперпозицией вторичных волн, идущих от всех элементарных источников.

Предполагается, что интенсивность источников, расположенных на поверхности  $S$ , пропорциональна величине площади  $dS$ . Амплитуда ( $f$ ) и начальная фаза колебаний ( $\alpha$ ) зависят от расстояния между  $dS$  и источником света  $L$  (т. е. от  $R$ ), а также от ориентации элемента  $d\vec{S}$  в пространстве. Сферическая волна, исходящая от элемента площади поверхности  $\vec{n}dS$ , описывается выражением

$$f(\vec{n}, R) e^{i(kr - \omega t + \alpha(\vec{n}, R))}, \quad (24.7)$$

где  $r$  – расстояние от  $dS$  до точки наблюдения. Поле в точке  $M$  определяется интегралом

$$E(M) = \int_S \frac{f(\vec{n}, R)}{r} e^{i(kr - \omega t + \alpha(\vec{n}, R))} dS. \quad (24.8)$$

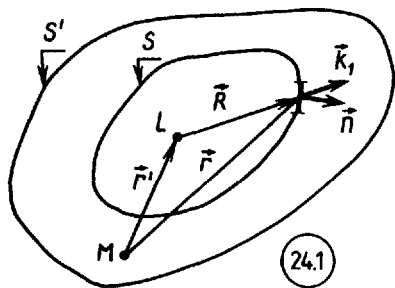
При практическом применении этого принципа поверхность  $S$  разбивается на зоны Френеля, причем вклад в колебания от каждой зоны удается учесть некоторыми феноменологическими коэффициентами.

Для обоснования принципа Гюйгенса – Френеля на основе исходных положений электродинамики используем решение волнового уравнения для точечного источника (24.6). Далее применим формулу Грина (см. II, II, 37):

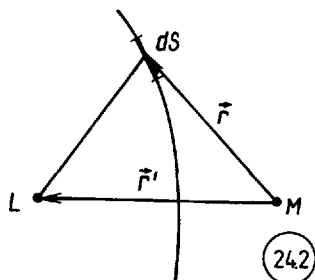
$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_S \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (24.9)$$

В качестве области интегрирования выбираем объем  $V$ , заключенный между двумя замкнутыми поверхностями: уже рассмотренной ( $S$ ) и другой, охватывающей ее,  $S'$ . Правая часть в формуле Грина распадается на два слагаемых:

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \int_S \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS + \int_{S'} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS'.$$



(24.1)



(24.2)

Положим, что

$$\varphi = \frac{1}{r} e^{ikr}, \quad \psi = \frac{a}{R} e^{i(kR - \omega t)},$$

и сдвинем поверхность  $S'$  в бесконечность. Интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю вследствие быстрого убывания подинтегральной функции. Получается равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\infty} \left[ \frac{1}{r} e^{ikr} \Delta \left( \frac{a}{R} e^{i(kR - \omega t)} \right) - \frac{a}{R} e^{i(kR - \omega t)} \Delta \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dV = \\ & = \int_S \left[ \frac{1}{r} e^{ikr} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{a}{R} e^{i(kR - \omega t)} \right) - \frac{a}{R} e^{i(kR - \omega t)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS. \end{aligned} \quad (24.10)$$

Используя тождество

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2(\nabla\varphi)(\nabla\psi)$$

и соотношение П. III, 9, находим

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) &= -4\pi\delta(\vec{r}) e^{ikr} - k^2 \frac{e^{ikr}}{r}, \\ \Delta \left( \frac{1}{R} e^{i(kR - \omega t)} \right) &= -4\pi\delta(\vec{R}) e^{i(kR - \omega t)} - k^2 \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R}. \end{aligned}$$

Вычислим еще производные по нормали к поверхности  $S$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \cos(\widehat{\vec{n}\vec{r}}) = \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\widehat{\vec{n}\vec{r}}), \\ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \right) &= \left( ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \cos(\widehat{\vec{n}\vec{R}}), \end{aligned}$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности. Подстановка найденных величин в выражение (24.10) приводит к формуле

$$\begin{aligned} & -4\pi a \int_{\infty} \left[ \frac{1}{r} e^{ikr} \delta(\vec{R}) e^{i(kR - \omega t)} - \frac{1}{R} e^{i(kR - \omega t)} \delta(\vec{r}) e^{ikr} \right] dV = \\ & = \int_S \frac{ae^{ikr} e^{i(kR - \omega t)}}{rR} \left[ \left( ik - \frac{1}{R} \right) \cos(\widehat{\vec{n}\vec{R}}) - \left( ik - \frac{1}{r} \right) \cos(\widehat{\vec{n}\vec{r}}) \right] dS. \end{aligned} \quad (24.11)$$

Формула (24.11) дает искомый результат, если учесть, что при  $r = 0$ ,  $R = r'$  и что в области интегрирования  $R$  нигде не равно нулю.

Получаем

$$\frac{a}{r'} e^{i(kr' - \omega t)} = \int_S \frac{f}{r} e^{i(kr - \omega t)} dS, \quad (24.12)$$

где

$$f = \frac{1}{4\pi} \frac{ae^{ikR}}{R} \left[ \left( ik - \frac{1}{R} \right) \cos(\vec{n}\vec{R}) - \left( ik - \frac{1}{r} \right) \cos(\vec{n}\vec{r}) \right]. \quad (24.13)$$

В равенстве (24.12) слева — выражение для сферической волны, испускаемой точечным источником  $L$ , взятое в точке наблюдения  $M$  (см. (24.6)). Правую же часть можно истолковать как суперпозицию сферических волн, испускаемых элементами поверхности  $dS$ , для чего следует выражения (24.12) и (24.13) сравнить с выражениями (24.7) и (24.8). Амплитуда колебаний (и интенсивность) определяется величиной  $f$ . Она зависит от  $R$  и ориентации площадки. Если придать комплексному выражению в квадратных скобках (см. (24.13)) экспоненциальную форму и перемножить все получающиеся экспоненты в подынтегральной функции (24.12), то выявится и начальная фаза  $\alpha$ , зависящая от  $R$  и ориентации площадки.

Заметим в заключение, что вместо замкнутой поверхности  $S$  может быть взята незамкнутая, уходящая краями в бесконечность (рис. 24.2), — принцип Гюйгенса — Френеля приложим и к ней.

**24.4. Геометрическая оптика как предельный случай волновой.** До сих пор рассматривались те вопросы оптики, которые связаны с волновой природой света. Однако известно, что часто волновой характер света можно игнорировать. Полагают, что энергия света распространяется вдоль определенных линий — световых лучей. Ее перемещение в пространстве можно уподобить даже движению некоторых частиц. В таком случае законы распространения света формулируются на языке геометрических соотношений. Поэтому соответствующий раздел физики световых явлений носит название геометрической оптики. Нам нужно выяснить границы применимости геометрических представлений о свете, для чего следует исходить из природы света, т. е. из волновых законов.

Прежде всего заметим, что понятие луча естественно появляется в теории плоских или сферических волн в однородной среде. Луч есть перпендикуляр к фронту волны. Его направление определяется волновым вектором  $\vec{k}$ , и оно совпадает с направлением распространения энергии электромагнитного поля плоской или сферической волны. Для плоской волны лучи — параллельные прямые, для сферической — радиальные линии, идущие от точечного источника.

Далее существенны характер пространственного распределения волнового поля, геометрическое изображение его с помощью лучей в более общем случае неоднородной среды. При анализе этих вопросов исходим из волнового уравнения, записанного в виде

$$\Delta A - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \quad (24.14)$$

где показатель преломления для неоднородной среды есть функция координат. Исключим временную зависимость полевой величины  $A$ , используя подстановку:

$$A(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) e^{i\omega t}. \quad (24.15)$$

В результате приходим к уравнению, называемому уравнением Гельмгольца:

$$\Delta A + k^2 n^2 A = 0, \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right). \quad (24.16)$$

В однородной среде уравнение (26.16) имеет решение в виде плоских волн:

$$A(\vec{r}) = a e^{i n \vec{k} \vec{r}}. \quad (24.17)$$

(В формуле (24.17)  $n k = k'$  — волновое число в среде.)

Для неоднородной среды будем искать решение в той же форме, но учитывая зависимость показателя преломления среды от координат точки пространства  $n \vec{k} \vec{r} = k L(\vec{r})$ , где  $L(\vec{r})$  — фаза волны, деленная на  $k$ .

Итак, предполагаемое решение имеет вид

$$A = a e^{i k L(\vec{r})}. \quad (24.18)$$

Подстановка выражения (24.18) в уравнение Гельмгольца (24.16) приводит к равенству

$$(\text{grad } L)^2 = n^2 - \frac{1}{k} \Delta L. \quad (24.19)$$

Допустим, что во всех точках пространства

$$\left| \frac{\Delta L}{k} \right| \ll n^2, \quad (24.20)$$

тогда уравнение (24.19) переходит в равенство

$$(\text{grad } L)^2 = n^2, \quad (24.21)$$

т. е.  $|\text{grad } L| = n$ , и решение (24.18) переходит в уравнение плоской волны.

Разложим функцию  $L(\vec{r})$  в окрестностях произвольной точки  $\vec{r}_0$  в ряд по степеням  $(\vec{r} - \vec{r}_0)$ . Благодаря условию (24.20), можно ограничиться первыми двумя членами разложения:

$$L(\vec{r}) = L(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0) (\text{grad } L)_{\vec{r}_0}. \quad (24.22)$$

Введем вектор  $\vec{k}$ , равный по модулю числу  $k$  в формуле (24.18) и совпадающий по направлению с  $(\text{grad } L)_{\vec{r}_0}$ . После подстановки формулы (24.22) и  $\vec{k}$  в обсуждаемое решение (24.18) приходим к выражению



$$A = \text{const } e^{ik\vec{r}(\text{grad } L) r_0} = \text{const } e^{in(\vec{r}_0) \vec{k}\vec{r}} \quad (24.23)$$

уравнению плоской волны.

В рассматриваемом приближении (24.20) могут быть введены лучи как линии, всюду перпендикулярные поверхности равной фазы  $L(\vec{r}) = \text{const}$  или фронту волны (рис. 24.3) Это значит, что применима геометрическая оптика. Осталось рассмотреть условие (24.20) с физической точки зрения. Так как по формуле (24.21)  $|\text{grad } L| = n$ , то

$$|\Delta L| \sim \left| \frac{\Delta n}{\Delta x} \right|.$$

Поэтому выражение (24.20) дает

$$\frac{1}{k} \left| \frac{\Delta n}{\Delta x} \right| \ll n^2. \quad (24.24)$$

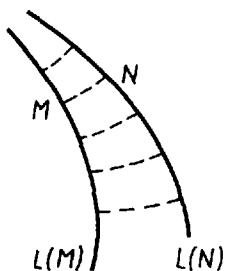
Следовательно, данное приближение, а с ним и геометрическая оптика применимы, если длина волны  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  много меньше расстояний, на которых заметно изменяется показатель преломления; в частности, в случае кусочно-однородной среды  $\lambda$  много меньше размеров однородных областей: отдельных тел, отверстий в телах и т. п.

**24.5. Дисперсия диэлектрической проницаемости.** Классическая электродинамика для поля в веществе использует простейшее материальное уравнение

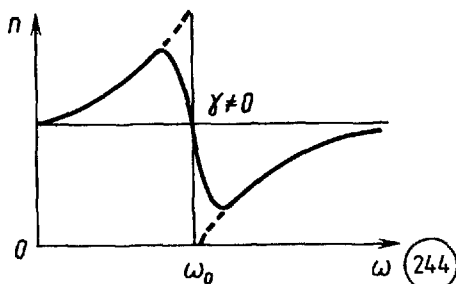
$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E},$$

в соответствии с которым  $\varepsilon$  является постоянной величиной, не зависящей ни от напряженности, ни от частоты электромагнитных волн в диэлектрике. Но опыт свидетельствует о зависимости скорости распространения или показателя преломления диэлектрика от частоты волн. В соответствии с формулами

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad n = \frac{c}{c'} = \sqrt{\varepsilon}$$



(243)



(244)

имеет место зависимость диэлектрической проницаемости среды от частоты ( $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ ), или *дисперсия диэлектрической проницаемости среды*.

Это явление лежит за пределами феноменологической электродинамики Максвелла и полное объяснение получает в квантовой теории вещества. Однако качественная картина дисперсии понятна и из простых соображений классической электронной теории. Ее можно раскрыть с помощью уравнений Максвелла — Лоренца.

Исходим из модели связанного и излучающего электрона. Уравнение движения его в электрическом поле волны имеет вид

$$\vec{r}'' = -\frac{e}{m} \frac{\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \delta)}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}, \quad (24.25)$$

где  $\gamma$  — коэффициент сопротивления движению электрона вследствие радиационного трения, а  $\delta = \arctg \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$  — сдвиг фазы колебания электрона.

Предполагается, что длина волны много больше размеров области, где движется электрон. Переменный дипольный момент колеблющегося электрона выражается формулой

$$\vec{p} = -e\vec{r} = \frac{e^2}{m} \frac{\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (24.26)$$

Допустим, что в веществе содержится на единицу объема  $N$  независимых друг от друга электронов, вносящих вклад в поле в диэлектрике (такой модели вещества соответствует, например, разреженный газ). Тогда поляризация вещества описывается выражением

$$\vec{P} = \vec{p}N = \frac{Ne^2}{m} \frac{\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (24.27)$$

Далее используем формулу для вектора электрической индукции

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

откуда

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 \left( 1 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \right) e^{i(\omega t - \delta)}.$$

Поскольку  $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ , то

$$\varepsilon = 1 + \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (24.28)$$

Мы видим, что диэлектрическая проницаемость зависит от частоты волнового поля. Для нее получено комплексное выражение. Это в свою очередь ведет к комплексному волновому вектору, так как

$$k = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{c}.$$

Физический смысл комплексного  $k$  раскрывается при выделении

действительной и мнимой частей. Электромагнитная волна

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

при подстановке  $k = a + ib$  приобретает вид

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm bx} e^{i(ax - \omega t)}.$$

Отсюда видно, что роль обычного волнового вектора играет действительная часть комплексного волнового числа  $k$ . Мнимая часть (величина  $b$ ) определяет затухание волн при поглощении их средой либо усилению в так называемых активных средах.

Используя выражение (24.28), найдем показатель преломления с помощью формулы (23.32):

$$n = \sqrt{\varepsilon}.$$

В разреженном газе и средах, где мало число взаимодействующих с волной электронов,

$$\left| \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right| \ll 1,$$

поэтому

$$n \approx 1 + \frac{Ne^2}{2m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = 1 + \frac{Ne^2}{2m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} + i \frac{Ne^2}{2m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (24.29)$$

Действительная часть комплексного показателя преломления среды с дисперсией играет роль показателя преломления  $\bar{n}$ , т. е.

$$c' = \frac{c}{\bar{n}}.$$

На рисунке 24.4 показан ход кривой для зависимости  $\bar{n}(\omega)$  при малых коэффициентах  $\gamma$ . Характерная особенность дисперсии — резкое возрастание, а затем скачкообразный спад ее при частоте волны, близкой к собственной частоте связанного электрона, с последующим новым нарастанием.

Несмотря на простоту исходной модели, формула (24.29) достаточно полно описывает дисперсию разреженных газов и некоторых растворов.

В веществе обычно бывает несколько собственных частот  $\omega_{0k}$  для колебаний электронов. Поэтому поляризация вещества вместо соотношения (24.27) выражается формулой

$$\vec{P} = \frac{e^2 \vec{E}}{m} \sum_k \frac{N_k e^{-i\delta_k}}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}.$$

Соответственно видоизменяется формула (24.29) для показателя преломления:

$$\tilde{n} = 1 + \frac{e^2}{2m} \sum_k \frac{N_k (\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

(Различием в разности фаз колебаний  $\delta_k$  мы пренебрегаем.)

**24.6. Зависимость диэлектрической проницаемости от напряженности поля. Понятие о нелинейной оптике.** Вновь начнем с анализа материального уравнения классической электродинамики:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Пропорциональность  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  наблюдается только для сравнительно малых значений напряженности электрического поля. С созданием квантовых источников электромагнитных волн (в световом диапазоне они называются лазерами) в последние двадцать лет получены потоки энергии в волне порядка  $10^{16} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$ , что соответствует напряженности поля  $E \sim 10^8 \dots 10^9 \frac{\text{В}}{\text{см}}$ . Это огромные напряженности: они сравнимы и превышают напряженности внутриатомного поля. Понятно, что волны такой интенсивности в веществе не могут не изменять его свойства. И прежде всего становится зависящей от величины  $\vec{E}$  диэлектрическая проницаемость вещества. Напомним, что

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \varepsilon = 1 + \chi,$$

где  $\chi$  — диэлектрическая восприимчивость вещества, считающаяся в максвелловской электродинамике постоянной. При высоких напряженностях поля следует написать разложение поляризации  $\vec{P}$  по степеням напряженности поля  $\vec{E}$ , что для модулей величин дает

$$P = \chi_1 \varepsilon_0 E + \chi_2 \varepsilon_0 E^2 + \chi_3 \varepsilon_0 E^3 + \dots \quad (24.30)$$

Это основная формула нелинейной оптики. Коэффициенты  $\chi_1, \chi_2$  и т. д. в общем случае зависят от частоты, но мы дисперсию среды сейчас учитывать не будем, т. е. считаем коэффициенты постоянными параметрами среды. Покажем на отдельных примерах, к чему приводит такое изменение модели поляризации вещества.

Пусть в диэлектрике распространяется гармоническая электромагнитная волна:

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t).$$

Поляризация среды, кроме линейного члена, содержит квадратичный, кубический и т. д. по степени напряженности члены:

$$P = \chi_1 \varepsilon_0 E_0 \cos(kx - \omega t) + \chi_2 \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) + \chi_3 \varepsilon_0 E_0^3 \cos^3(kx - \omega t) + \dots$$

Используя тригонометрические тождества, получим

$$P = \chi_1 \varepsilon_0 E_0 \cos(kx - \omega t) + \frac{\chi_2 \varepsilon_0}{2} E_0^2 \cos 2(kx - \omega t) + \frac{\chi_3 \varepsilon_0}{3} E_0^3 \times \\ \times \cos 3(kx - \omega t) + \dots \quad (24.31)$$

(часть образующихся членов несущественна для дальнейшего и опущена).

В случае только линейной зависимости поляризации вещества от напряженности поля испускаемая веществом вторичная волна имеет ту же частоту, что и внешняя, первичная. При нелинейной зависимости «отклик» вещества на волну содержит и иные частоты. Так, второй член в формуле (24.31) дает удвоенную частоту, третий — утроенную. Впервые эффект удвоения частоты в кристаллах был открыт в 1961 г., в 1962 г. было открыто утроение частот. В эти же годы Р. В. Хохлов и С. А. Ахнанов в СССР получили фундаментальные результаты в теории нелинейных оптических явлений. Среди нелинейных эффектов назовем также самофокусировку светового пучка и вынужденное комбинационное рассеяние. На основе нелинейных эффектов были созданы принципиально новые оптические устройства, например параметрические генераторы с плавной перестройкой частот.

Рассмотрим явление самофокусировки световых пучков. Самофокусировка появляется, если в разложении (24.30) существен квадратичный член. В таком случае зависимость показателя преломления от амплитуды электромагнитной волны (возникающая через зависимость от амплитуды вектора поляризации) может быть представлена в виде

$$n = n_0 + n_1 E^2.$$

В сильных полях наличие второго слагаемого приводит к самофокусировке. Допустим, что на тело из однородного диэлектрика падает пучок параллельных световых лучей, причем интенсивность пучка больше всего у его осевой линии. При прохождении света показатель преломления становится большим на оси, т. е. ранее оптически однородная среда становится неоднородной. Ее влияние на световой пучок эквивалентно действию собирающей линзы. Сказанное справедливо для  $n_1 > 1$ . При  $n_1 < 1$  среда действует как рассеивающая линза.

**24.7. Границы применимости классической электродинамики в оптике.** Мы видели, что основные законы оптики находят теоретическое обоснование в классической электродинамике. Однако оптика — самостоятельная отрасль физического знания, охватывающая широчайший круг явлений, свойств, оптических устройств. Классическая электродинамика далеко не ко всем им применима. Причина заключается в ограниченности и приближенном характере электродинамики, что обусловлено в свою очередь грубостью применяемых в ней электромагнитных моделей вещества. Проистекающие отсюда ограничения усугубляются в области коротких световых

волн, для которых становится, как правило, существенной атомарная структура вещества.

Установленные еще Максвеллом соотношения для скорости волн в диэлектрике и для показателя преломления

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}, \quad n_{12} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

сыграли важную историческую роль в развитии электромагнитной теории света. Они подвергались тщательной экспериментальной проверке. Формула для показателя преломления хорошо выполняется для одних веществ и вообще не выполняется для других либо выполняется только в определенных диапазонах частот.

Существенные ограничения применимости классической электродинамики в оптике связаны с поглощением и дисперсией света. Достаточно сказать, что в принципе все диэлектрики должны быть прозрачными для электромагнитных волн, однако в области светового диапазона частот этого отнюдь не наблюдается. Феноменологическая электродинамика не объясняет полностью дисперсию, в нее не укладываются эффекты нелинейной оптики.

Чтобы охватить весь круг явлений взаимодействия света с веществом, необходим учет атомно-молекулярного строения вещества, квантовой природы света, квантовых закономерностей взаимодействия света с веществом.

Но это не умаляет значения электродинамики как фундаментальной теории. Следует подчеркнуть основополагающее значение уравнений Максвелла в вакууме. В теории электромагнитного поля и в любой теории световых явлений они являются исходными соотношениями. Напомним также, что область применимости классической электродинамики как в вакууме, так и в веществе, несмотря на ограничения, все же очень обширна. И даже в тех случаях, когда ее законы оказываются не вполне точными, их использование позволяет нарисовать и осмыслить простую качественную картину физических явлений.

### Методические указания и рекомендации

I. Выбранная в курсе последовательность изложения материала позволяет во многих случаях получать конкретные выводы переходом от общего к частному. Удастся избежать выкладки и в ряде вопросов главы IX, переходя от формул для электромагнитных волн в вакууме к веществу формальными заменами некоторых параметров. Тем не менее все вопросы § 23 носят принципиальный характер и должны быть проработаны на лекциях.

Завершает курс параграф, посвященный электромагнитной природе света. Его при желании можно рассматривать как пример приложения теоретических положений электродинамики к широчайшему классу физических явлений, изучаемых в оптике. Но задача