пространства в данный момент времени. Поскольку практический смысл имеет ограниченная в пространстве система зарядов, то историю ее движения – функции $\varrho(\vec{r}_0, t)$, $\vec{j}(\vec{r}_0, t)$ – необходимо знать только до некоторого начального момента времени в прошлом. Пусть R – максимальное расстояние до зарядов системы. В таком случае, зная плотности ϱ и $\vec{j}$ с момента времени $t - \frac{R}{c}$, можно в момент t и во все последующие моменты определить поле, создаваемое системой зарядов, в заданной точке наблюдения M.

На практике часто начальные условия упрощаются: до момента $t=0$ система находилась в стационарном движении $(\varrho(\vec{r}_0), \vec{j}(\vec{r}_0))$, после чего – в нестационарном $(\varrho(\vec{r}_0, t), \vec{j}(\vec{r}_0, t))$. Поэтому в момент $t=0$ потенциалы определяются постоянными начальными значениями, а затем – выражениями для запаздывающих потенциалов. Поле, имевшее в начальный момент статический характер, далее изменяется вместе изменением ϱ и $\vec{j}$ (с учетом запаздывания).

Наконец, типичны некоторые периодические изменения ϱ, $\vec{j}$, приводящие к периодическому же полю. В таком случае вопрос о начальном состоянии и о предыстории движения зарядов снимается.

Таковы в общих чертах итоги решения задачи электродинамики по нахождению поля в вакууме.

Методические указания и рекомендации

I. Глава I курса содержит теоретические основы классической электродинамики: в ней введены основные понятия и величины, а также основные уравнения и принципы этой науки. Все остальное содержание электродинамики составляют выводы и следствия, полученные с помощью математических преобразований при решении системы уравнений Максвелла или Максвелла – Лоренца в тех или иных случаях конкретных систем полей и зарядов.

Основополагающее положение главы I определяет и методику ее изложения и изучение курса в целом; материал должен быть подробно изложен на лекциях; при изучении остальных глав курса, где возможности для самостоятельной работы студентов более благоприятны, следует постоянно возвращаться к этой главе.

Ввиду особой важности положений, изложенных в главе как для конкретных приложений теории к частным задачам, так и для понимания природы электромагнитных взаимодействий, студентам надо знать их качественные формулировки:

– Фундаментальные понятия электродинамики – это понятия электрического заряда и электромагнитного поля.

– Заряд – свойство элементарных частиц и тел, характеризующееся величиной заряда Q. Эта величина измеряется по силовому взаимодействию зарядов и токов. Заряды создают электромагнитное поле и испытывают силовое действие поля. Справедлив закон сохранения заряда.

— Электромагнитное поле — вид материи. Любой электрический заряд связан с собственным полем, но поле может существовать и в отрыве от зарядов, в свободном состоянии, в виде электромагнитных волн.

— Поле описывается величинами электрической напряженности $\vec{E}$ и магнитной индукции $\vec{B}$, характеризующими силовое действие поля на пробный точечный заряд. Сила определяется формулой Лоренца.

— Связь поля с зарядами описывается уравнениями Максвелла, которые позволяют рассчитать поле по заданному расположению и движению зарядов в пространстве, а при известном поле — определить расположение и движение зарядов, создающих поле.

— Для электромагнитного поля справедлив принцип суперпозиции, заключающийся в векторном сложении электрических напряженностей $\vec{E}_i$ и магнитных индукций $\vec{B}_i$ полей, созданных в данной точке пространства разными зарядами. Векторы $\vec{E}_i$ и $\vec{B}_i$ характеризуют несколько полей, существующих одновременно в данной точке.

— Уравнения Максвелла, дополненные уравнением второго закона Ньютона, составляют систему уравнений Максвелла — Лоренца, описывающую систему поле-заряды. Изучение различных частных случаев проявления состояний этой системы составляет содержание всех вопросов электродинамики.

— Задача интегрирования уравнений Максвелла в общем случае решается с помощью перехода от напряженностей к потенциалам поля. Уравнения поля в потенциалах являются уравнениями Даламбера, хорошо изученными в математике.

— Общее решение уравнений поля в потенциалах представляет собой совокупность плоских монохроматических волн всевозможных частот, амплитуд, поляризаций, направлений распространения и запаздывающих потенциалов. Основная особенность электромагнитного поля состоит в том, что его переменные значения (возмущения) распространяются в пространстве со скоростью $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$.

— Закон сохранения энергии и импульса для поля справедлив для изолированной системы поле-заряды. В поле могут иметь место потоки энергии, переносящие ее с одного участка на другой.

— Все частные случаи полей содержатся в указанном общем решении и сводятся к электромагнитным волнам в пространстве, утерявшим непосредственную связь с зарядами, и стационарному полю неподвижных или стационарно движущихся зарядов, к квазистационарным переменным полям (не излучающимся в пространство) и к излучаемым зарядами электромагнитным волнам.

II. В каждом разделе физики используется специфический математический аппарат. Для изучения электродинамики необходимо освоить векторную алгебру и векторный анализ (см. [3]). Чтобы успешно работать с книгой, необходимо, по крайней мере, следующее:

– помнить наизусть определения (формулы) скалярного и векторного произведений, операций grad, div, rot (в декартовых координатах) и др.;

– уметь выполнять вычисления grad, div, rot для часто встречающихся выражений;

– помнить *основные* и уметь доказывать *все* часто встречающиеся тождества векторного анализа (П. II);

– знать свойства δ-функции (П. III).

III. Полезно в процессе изучения курса составить для себя справочник по электродинамике, т. е. необходимо заносить в особый блокнот основные формулы с их названиями.

IV. По мере изучения параграфов курса контролируйте его усвоение, отвечая на вопросы к этим параграфам.

§ 1. Какие свойства материальных объектов характеризует электрический заряд? Какими свойствами обладает эта физическая величина? Выведите формулу (1.3). Получите размерности для $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Выведите формулу (1.10). Какие поля называют потенциальными, вихревыми? Как с помощью операций векторного анализа задать дифференциальные уравнения поля? Вспомните вид уравнений Лапласа, Пуассона, Даламбера (см. [2]). Решите задачу 1 из упражнений к главе.

§ 2. Выучите уравнения Максвелла наизусть. В каких задачах применимы уравнения (2.3)? Сформулируйте принцип суперпозиции полей. Предложите несколько задач, где он используется. Являются ли дифференциальная и интегральная формы уравнений физически и математически тождественными? Изобразите графически ряд электрических и магнитных полей. Назовите законы электромагнетизма, открытые до формулировки уравнений Максвеллом. Какие основания имеются для утверждения, что электромагнитное поле является видом материи? Чем поле отличается от вещества? Сравните постановку вопроса о поле в школьном и вузовском курсах. Как перейти от интегральной формы уравнений Максвелла к дифференциальной? Обсудите направление нормали к поверхности при использовании теоремы Гаусса, направление нормали и направление обхода контура в теореме Стокса. Решите задачи 2–6.

§ 3. Проделайте самостоятельно выкладки, приводящие к формулам энергии и закону сохранения энергии поля. Назовите самые общие (философские) определения материи, движения, энергии применительно к полю, к системе поле-заряды. Назовите при выводе энергии поля исходные предположения. Обсудите вопрос о связи потенциальной энергии механической системы с энергией поля. Разберите все известные вам случаи перехода энергии электромагнитного поля в другие виды (в явлениях, механических устройствах и т. п.). Сопоставьте макроскопическую и микроскопическую (квантовую) картины полей в связи с формулами энергии и импульса поля. Прочитайте об открытии светового давления в истории физики (см. [4]). Обсудите термин «поток энергии»: движется ли энергия как некая субстанция, или движется материя, обладающая энергией. Решите задачи 7–9.

§ 4. Вспомните свойства волнового уравнения и уравнения Даламбера (см. [2, 3]). Обсудите структуру общего решения уравнений поля в потенциалах. Почему функции φ и $\vec{A}$ должны быть непрерывными вместе со своими первыми производными? Обсудите роль начальных условий, особенности граничных условий. Свяжите структуру общего решения с конкретными полями.

§ 5. Здесь дается основной аппарат для решения большинства задач курса. Для успешного изучения его необходимо повторение ряда вопросов из методов математической физики: решение волнового уравнения и уравнения Даламбера, разложение функций в ряд и интеграл Фурье и др. Полезно ответить на ряд вопросов: что называют в физике волновым движением, волной, плоскими волнами, сферическими волнами, гармоническими волнами? Определите амплитуду, фазу, частоту, длину волны. Докажите, что общее решение уравнения Даламбера имеет указанную в тексте структуру. Покажите, что условие $\vec{k}\vec{r} = \text{const}$ определяет плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{k}$. Вспомните характеристическое уравнение для дифференциального уравнения. Вспомните формулы Эйлера и выразите cos, sin через экспоненту. Покажите физический смысл запаздывающих потенциалов. Обсудите связь между плоскими и сферическими волнами. Рассмотрите стандартное обозначение векторов $\vec{r}$, $\vec{r}'$ и $\vec{r}_0$ в случае, если точка M совпадает с началом координат.

Упражнения

1. Вычислить поток электрического поля через поверхность сферы радиусом r, если напряженность поля в системе с началом координат в центре сферы выражается формулой

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}.$$

2. Вычислить поток вектора однородного поля $\vec{E}$ через произвольную конечную замкнутую поверхность.

3. Вычислить поток вектора магнитной индукции поля через произвольную конечную замкнутую поверхность.

4. Найти циркуляцию вектора напряженности электрического поля по любому замкнутому контуру, используя выражение для потенциала поля.

5. Найти циркуляцию вектора магнитной индукции поля по любому замкнутому контуру и показать, что в общем случае она отлична от нуля.

6. Доказать, что циркуляция вектора однородного поля $\vec{B}$ по замкнутому контуру равна нулю.

Указание. Задачи 1–6 можно решить с помощью теорем Гаусса и Стокса.

7. Выразить работу по перемещению точечного электрического заряда в электромагнитном поле через потенциалы поля.

8. Обсудить *вопрос о возможности или невозможности введения* изолированной системы поле-заряды при наличии плоских электромагнитных волн.

9. Обсудить вопрос о возможности или невозможности введения изолированной системы при наличии сферических электромагнитных волн.

10. Показать, что задание ротора и дивергенции полностью определяет векторное поле.

Пусть $\operatorname{div}\vec{a}=\vec{f}_1(\vec{r}), \quad \operatorname{rot}\vec{a}=\vec{f}_2(\vec{r})$.

Разложим исходный вектор на составляющие $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, причем

$$1)\ \operatorname{div}\vec{a}_1=f_1. \quad 2)\ \operatorname{div}\vec{a}_2=0.$$
$$3)\ \operatorname{rot}\vec{a}_1=0. \quad 4)\ \operatorname{rot}\vec{a}_2=\vec{f}_2.$$

Положим $\vec{a}_1=-\operatorname{grad}\varphi$. Тогда уравнение (3) удовлетворяется тождественно, а из уравнения (1) следует

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=f_1,$$

или

$$\Delta\varphi=f_1.$$

Последнее уравнение имеет решение

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{f(\vec{r}_0)\,dV_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}+\text{const},$$

тогда

$$a_1=-\operatorname{grad}\frac{1}{4\pi}\int\frac{f(\vec{r}_0)\,dV_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\ -\text{вектор } \vec{a}_1 \text{ найден.}$$

Подстановка $\vec{a}_2=\operatorname{rot}\vec{A}$ обращает уравнение (2) в тождество, а из уравнения (3) имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A}=\vec{f}_2.$$

Дополняя выбор $\vec{A}$ условием $\operatorname{div}\vec{A}=0$, имеем

$$\Delta\vec{A}=-\vec{f}_2.$$

Это уравнение имеет решение

$$\vec{A}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{f}_2(\vec{r}_0)\,dV_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|},\quad \vec{a}_2=\operatorname{rot}\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{f}_2(\vec{r}_0)\,dV_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}.$$

(Условие $\operatorname{div}\vec{A}=0$ не ограничивает общность, так как преобразование $\vec{A}'=\vec{A}+\operatorname{grad}\psi$ при произвольной ψ не изменяет $\operatorname{rot}\vec{A}$. Пусть

$\operatorname{div}\vec{A} = f$. Для $\vec{A}'$ имеем $\operatorname{div}\vec{A}' - \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi = f$; следовательно, для выполнения равенства $\operatorname{div}\vec{A}' = 0$ нужно, чтобы $\Delta\psi = -f$. Поскольку ψ – произвольный скаляр, это всегда возможно.)

Глава II
СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Выше рассмотрены общая система уравнений для электромагнитного поля и общее решение этой системы. Сейчас мы приступаем к анализу частных проявлений поля, образованного конкретными системами зарядов, в которых расположение и движение зарядов подчинены определенным ограничениям (например, заряды покоятся, движутся равномерно и т. д.). Сразу же оговорим одно условие для всех задач подобного рода. Общее решение уравнений поля в потенциалах складывается из общего решения уравнений (4.10) без правой части и частного решения этих полных уравнений – решения в виде запаздывающих потенциалов. С помощью принципа суперпозиции полей первое слагаемое – совокупность плоских волн – можно отнести к пустому пространству без зарядов; поэтому волны могут иметь место в любой задаче при любой системе зарядов и конкретно определяются начальными условиями. В задачах, где отыскивают поле зарядов, нет смысла рассматривать волновую часть решения, а следует сосредоточиться только на втором слагаемом, относящемся к полю, созданному данной системой зарядов. Иными словами, мы всякий раз решаем задачу с начальными условиями, соответствующими отсутствию волнового поля, не связанного с зарядами, данными в задаче.

§ 6. Стационарное электрическое поле в вакууме

6.1. Особенности стационарных полей. Стационарное поле возникает при условии $\frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = 0$, т. е. плотности токов и зарядов постоянны во времени. В этом случае уравнения поля в потенциалах (4.10) допускают независящие от времени решения, найденные ранее в § 5; они выражены формулами (5.26) и (5.27). Решения можно получить и из формул для запаздывающих потенциалов (5.29), отбрасывая зависимость величин ϱ и $\vec{j}$ от времени:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho(\vec{r}_0)}{r'}dV_0; \tag{6.1}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{r'}dV_0. \tag{6.2}$$