ционарном процессе положительный заряд ионов внутри проводника равен отрицательному заряду электронов.

Для электромагнитных волн – предельно релятивистского объекта, имеющего скорость передачи энергии в вакууме, равную c, как это будет показано ниже, вклады в энергию электрической и магнитной составляющих одинаковы.

В заключение раздела о стационарном электромагнитном поле рассмотрим вопрос о потоке энергии. Если имеет место одно электрическое или одно магнитное поле, то нет ни потока энергии, ни распределенного в пространстве импульса. (Из формул (3.7) и (3.17) следует, что эти величины равны нулю.) Но если в некоторой области пространства существуют одновременно стационарное магнитное и стационарное электрическое поля, причем векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ неколлинеарны друг другу, то имеется перенос энергии с плотностью потока

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{\mu_0}\,[\vec{E}\vec{B}].$$

Кроме того, такое поле обладает и импульсом, распределенным с плотностью

$$\vec{g} = \varepsilon_0\,[\vec{E}\vec{B}].$$

Стационарный поток энергии не приводит к изменению векторов напряженности и индукции в различных точках пространства; сохраняется в каждой точке плотность энергии и плотность импульса. Кроме того, если ввести величину $\tilde{w} = \frac{\sigma}{c}$ (плотность энергии в потоке, движущемся со скоростью c), то выполняется релятивистское соотношение $\tilde{w} = cg$.

Чтобы понять наличие потока энергии и импульса у стационарного поля, обратимся к аналогии. В стационарном потоке несжимаемой жидкости распределен импульс с плотностью $\mu\vec{v}$ (μ – плотность массы; $\vec{v}$ – скорость потока) и имеется движение энергии. Ниже мы увидим, что передача энергии по проводам в случае постоянного тока осуществляется именно за счет потока энергии в стационарном электромагнитном поле, существующем в непосредственной близости от провода.

Методические указания и рекомендации

I. Бóльшая часть материала главы с формальной точки зрения является частным случаем изученного ранее. Здесь изложены не электростатика и магнитостатика – самостоятельные разделы о постоянных полях в веществе, а лишь некоторые вопросы стационарных полей в вакууме. Принципиальное значение имеют дипольное приближение, анализ соотношения точек зрения близкодействия и дальнодействия в вопросе об энергии поля; соответствующий материал относится к лекциям. Ряд других вопросов может быт изучен студентами самостоятельно при надлежащей организации работы.

II. В процессе чтения главы контролируйте усвоение с помощью ответов на предлагаемые ниже вопросы.

§ 6. Покажите, что функция (6.1) является частным решением уравнения поля (6.7). Обдумайте соотношение между общим и частным решениями уравнения, физический смысл слагаемых в общем решении. Сопоставьте различные подходы к стационарному полю, используемые при расчетах. Найдите математический переход от закона Кулона к уравнению (6.4), опираясь на теорему Гаусса. Предложите пример системы точечных зарядов, для которой $Q = 0$, $\vec{p} \neq 0$; $Q = 0$, $\vec{p} = 0$, но не равен нулю квадрупольный момент. Решите задачи 1–6 из упражнений к главе.

§ 7. Вспомните определения работы, энергии, момента силы из механики (см. [1]). Обдумайте соотношение между формулами энергии взаимодействия зарядов и энергии поля, соответственно – интерпретацию энергии с точки зрения дально- и близкодействия. Рассмотрите примеры к параграфу, самостоятельно выполняя расчеты.

§ 8. Рассмотрите различные способы расчета магнитных полей. Разберитесь в истоках и пределах аналогии между электростатическим и магнитостатическим полями. Проделайте выкладки примеров, решите задачи 7, 8. Покажите общие особенности стационарных полей.

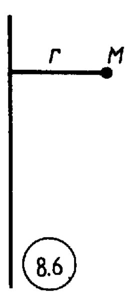
Упражнения

1. С помощью теоремы Гаусса найти поля равномерно заряженной нити, плоскости, цилиндрической и сферической поверхностей (рис. 8.6.).

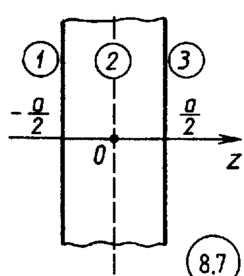
$$1)\ E = \frac{2k\tau}{r}. \quad 2)\ \vec{E} = 2\pi k\sigma\vec{n}. \quad 3)\ E = \frac{4\pi ka\sigma}{r},$$
$$r \geqq a;\ E = 0,\ r < a. \quad 4)\ E = \frac{4\pi ka^2\sigma}{r^2},\ r \geq a;\ E = 0,\ r < a.$$

2. С помощью уравнения в потенциалах найти поле бесконечно протяженной пластины толщиной a, заряженной с постоянной плотностью ϱ.

Ответ: Выбирая ось z перпендикулярно пластине, имеем соответственно для 1, 2 и 3 областей (рис. 8.7)



8.6



8.7

$$\varphi_1 = 2\pi k\varrho a z + \frac{1}{2}\pi k\varrho a^2, \quad \left(z \le -\frac{a}{2}\right);$$

$$\varphi_2 = -2\pi k\varrho z^2, \quad \left(-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}\right);$$

$$\varphi_3 = -2\pi k\varrho a z + \frac{1}{2}\pi k\varrho a^2, \quad \left(z \ge \frac{a}{2}\right);$$

$$E_{1,z} = -2\pi k\varrho a, \ E_{2,z} = 4\pi k\varrho z, \ E_{3,z} = 2\pi k\varrho a.$$

3. Найти поле бесконечного круглого цилиндра радиусом a, равномерно заряженного с плотностью ϱ, решая уравнение в потенциалах.

Ответ: $\varphi_1 = -\pi k\varrho r^2, \ E_{1,r} = 2\pi k\varrho r, \ (0 < r < a);$

$$\varphi_2 = 2\pi k\varrho a^2 \ln\frac{a}{r} - \pi k\varrho a^2, \ E_{2,r} = \frac{2\pi k\varrho a^2}{r}, \ (r \geqq a).$$

4. Найти поле прямолинейного отрезка нити длиной l, заряженного с постоянной линейной плотностью τ.

Вследствие симметрии в расположении зарядов от нуля отличны лишь составляющие $\vec{E}_x$ и $\vec{E}_z$ вектора напряженности поля (рис. 8.8). Элемент длины dz_0 создает поле с напряженностью

$$d\vec{E} = \frac{k\tau dz_0 \vec{r}'}{r'^3}.$$

Интегрируя по длине отрезка, получаем

$$E_x = \int\limits_{-(l-a)}^{a} \frac{k\tau dz_0}{z_0^2 + x^2}\cos\alpha, \ E_z = \int\limits_{-(l-a)}^{a} \frac{k\tau dz_0}{z_0^2 + x^2}\sin\alpha.$$

Произведем замену переменных (см. рис. 8.8):

$$z_0 = x\operatorname{tg}\alpha, \ dz_0 = \frac{x d\alpha}{\cos^2\alpha},$$

после чего вычисление интегралов не представляет труда:

$$E_x = \frac{k\tau}{x}(\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1), \ E_z = \frac{k\tau}{x}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

5. Вычислить дипольные и квадрупольные моменты систем точечных электрических зарядов, изображенных на рисунке 8.9.

Ответ: а) $p_x = aq, \ p_y = p_z = 0, \ D_{xx} = qa^2 - qa^2 = 0;$

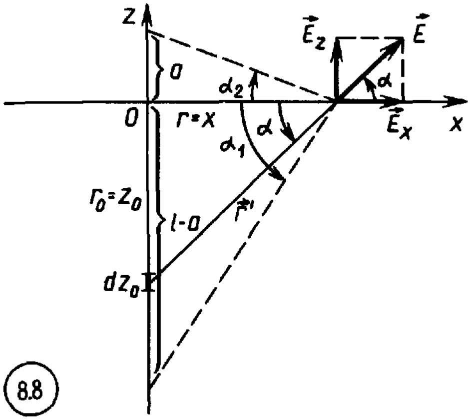
остальные компоненты квадрупольного момента также равны нулю.

б) $\vec{p} = 0, \ D_{xx} = -2qa^2, \ D_{yy} = 2qa^2,$

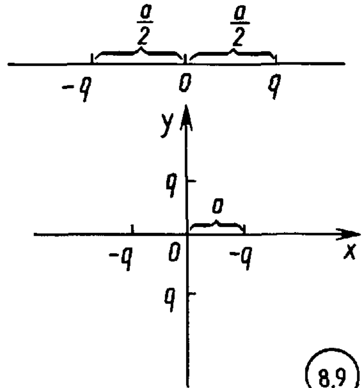
$$D_{zz} = 0, \ D_{xy} = D_{yx} = 0, \ D_{xz} = D_{zx} = 0, \ D_{yz} = D_{zy} = 0.$$

6. Вычислить дипольный и квадрупольный моменты круглого цилиндра радиусом a и высотой $2h$, равномерно заряженного по объему с плотностью ϱ (рис. 8.10).

Ответ: Дипольный момент равен нулю в силу симметрии располо-



8.8



8.9

жения зарядов. Для вычисления квадрупольного момента удобно использовать цилиндрические координаты r, φ, z:

$$D_{xx} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{h} \varrho r^3 \cos^2\varphi \, dr\, d\varphi\, dz = \frac{\pi a^4 h \varrho}{2};$$

$$D_{yy} = D_{xx};\ D_{zz} = \frac{2}{3}\pi a^2 h^3 \varrho;$$

остальные компоненты равны нулю.

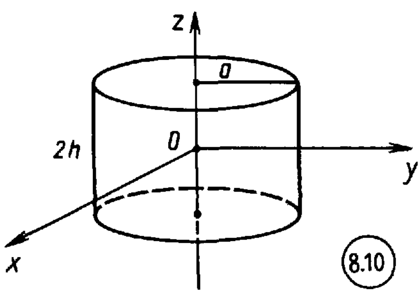
7. Найти индукцию поля бесконечного соленоида с плотностью поверхностного тока $i\left(\frac{\text{А}}{\text{м}}\right)$ (рис. 8.11).

Ответ: Из симметрии распределения тока по условиям задачи следует, что вектор индукции $\vec{B}$ параллелен оси Oz, а его модуль не зависит от координаты z и угла поворота вокруг оси Oz. Циркуляция вектора $\vec{B}$ по любому контуру типа (а) равна нулю; следовательно, индукция поля вне соленоида равна нулю в силу формулы (8.4). Вычисление циркуляции по контуру (б) дает

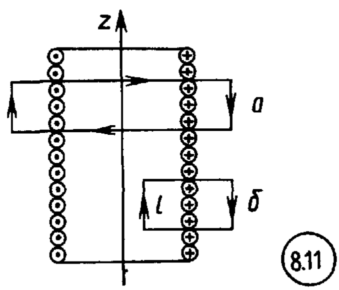
$$lB = \mu_0 i l,$$

откуда

$$B = \mu_0 i$$



8.10



8.11

во всех точках соленоида. Для соленоида с числом витков n на единицу длины и силой тока I получаем

$$B = \mu_0 n I.$$

8. Найти векторный потенциал и индукцию поля, созданного током, равномерно распределенным по поперечному сечению бесконечно длинного полого цилиндра, наружный и внутренний диаметры которого соответственно равны $2a$ и $2b$.

Указания. Используем уравнение

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}.$$

В декартовой системе направим ось Oz по оси цилиндра, так что $j_x = j_y = 0,\ j_z = j,$ откуда $A_x = A_y = 0,\ A_z = A$ и

$$\Delta A = -\mu_0 j.$$

Введем цилиндрические координаты r, α, z. Из симметрии в условиях задачи $A = A(r)$; следовательно,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA}{dr}\right) = 0,\ r \le a,\ r \ge b;$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA}{dr}\right) = -\mu_0 j,\ a \le r \ge b.$$

Прямое интегрирование уравнений приводит к выражению для потенциала

$$A_1 = C_1 \ln r + C_2,\ 0 \le r \le a;$$

$$A_2 = -\frac{\mu_0 j}{4} r^2 + C_3 \ln r + C_4,\ a \le r \le b;$$

$$A_3 = C_5 \ln r + C_6,\ \infty > r \ge b. \qquad (1)$$

Так как $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, то в данной задаче

$$\vec{B} = -\vec{e}_\varphi \frac{dA}{dr}. \qquad (2)$$

(См. выражение для ротора в цилиндрических координатах, П. II, 18.) С помощью формулы (1) получим соответственно для трех областей

$$\frac{dA_1}{dr} = \frac{C_1}{r},\ \frac{dA_2}{dr} = -\frac{\mu_0 j}{2} r + \frac{C_3}{r},\ \frac{dA_3}{dr} = \frac{C_5}{r}.$$

Требуя конечных значений индукции B, полагаем $C_1 = 0$. Без ограничения общности можно принять и $C_2 = 0$. Остальные постоянные находятся из условий непрерывности потенциала и индукции на границах областей.

Ответ:

$$A_1 = 0,\ B_1 = 0;$$

$$A_2 = -\mu_0 j\left(\frac{1}{4}r^2 - \frac{a^2}{2}\ln r + \frac{a^2}{2}\ln a - \frac{a^2}{4}\right);$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 j}{2} r\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right);$$

$$A_3 = -\frac{\mu_0 j}{2}\left\{(b^2 - a^2)\ln r + \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + a^2 \ln a - b^2 \ln b\right\},$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 j}{2}\,\frac{b^2 - a^2}{r}.$$

(При $a = 0$ получается поле тока, текущего по сплошному цилиндру:

$$B_1 = \frac{\mu_0 j}{2} r,\ \ 0 \le r \le b;$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},\ \ b \le r \le \infty;$$

$$I = j\pi b^2.)$$

Глава III
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В данной главе исследуется свободное электромагнитное поле существующее и распространяющееся в пространстве в виде электромагнитных волн. Как показано в § 5, произвольное волновое поле может быть представлено суперпозицией плоских волн вида $f\left(t - \frac{\vec{k}_0\vec{r}}{c}\right)$. Ниже волны рассматриваются подробнее; кроме того, обсуждается их происхождение, т. е. излучение электромагнитных волн системой электрических зарядов.

§ 9. Плоские электромагнитные волны

9.1. Уравнения Максвелла и образование электромагнитных волн. Положим в уравнениях Максвелла (2.3) $\varrho = 0$ и $\vec{j} = 0$, тогда уравнения описывают свободное электромагнитное поле в пустоте:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}. & 3.\ \operatorname{rot}\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\,\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \\ 2.\ \operatorname{div}\vec{E} = 0. & 4.\ \operatorname{div}\vec{B} = 0. \end{array}\right\} \qquad (9.1)$$

Из уравнений (9.1) непосредственно вытекает, что электрическое и магнитное поля в данном случае соленоидальны, линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ являются замкнутыми. В отличие от общего случая, рассмотренного выше, в § 2, источников линий электрического поля нет, и они охватывают линии переменного вектора $\vec{B}$. Магнитная составляющая любого поля соленоидальна, но в данном случае магнитное поле вызвано только «токами смещения»: линии магнитного поля охватывают линии переменного вектора $\vec{E}$.

Ни о каком разделении электромагнитного поля на самостоятель-