Введем также *интегральное или полное сечение рассеяния* определением

$$\sum = \int d\sum.$$

Для неполяризованного излучения

$$\sum = \frac{r_0^2}{2}\int(1 + \cos^2\vartheta)\, d\Omega,$$

что дает при вычислении выражение:

$$\sum = \frac{r_0^2}{2}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} (1 + \cos^2\vartheta)\cdot\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

Применяемое в теории и на практике *полное сечение рассеяния* равно отношению мощности рассеянного излучения к плотности потока энергии падающей волны:

$$\sum = \frac{\bar{N}}{\sigma_{\text{пад}}}. \tag{11.18}$$

Подставляя сюда значения σ и $\bar{N}$ по формулам (11.1), (11.11) и (11.16), получаем для электрона

$$\sum = \frac{8\pi}{3} r_0^2, \tag{11.19}$$

что совпадает с выведенной выше формулой.

Полное сечение имеет наглядную геометрическую интерпретацию: из падающего потока энергии рассеивается та часть, которая попадает на площадку $\sum$. (Соответственно для электрона классический радиус r_0 по порядку величины оказывается радиусом этой круговой площадки.)

Формула (11.19) известна в оптике под названием формулы Томсона. Она имеет фундаментальное значение для рассеяния электромагнитных волн свободными или слабосвязанными зарядами вещества. Ее можно использовать и при высоких частотах падающих волн, она применима вплоть до волн длиной в 10^{-10} м.

Методические указания и рекомендации

I. Изучение свободного электромагнитного поля как самостоятельного физического объекта существенно в методологическом плане. В методическом же отношении – это продолжение решения волновых уравнений, начатого ранее в главе I. Теперь анализируются векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$, рассчитываемые с помощью волновых потенциалов.

В вопросах излучения электромагнитных волн избран единый для всего курса путь – решение с помощью найденных в главе I запаздывающих потенциалов. В принципиальном плане дипольное электрическое излучение исчерпывает существо явления. Для практики существенно и магнитное излучение, которое кратко рассмотрено. Следует заметить, что материал по излучению электромагнитных волн относится к наиболее трудному для усвоения и требует тщательной проработки под руководством преподавателя.

Вопросы о рассеянии электромагнитных волн могут изучаться в ознакомительном плане, однако качественная сторона дела существенно важна для учителя.

II. По мере изучения данной главы необходимо выполнять задания и контролировать свои знания следующими вопросами:

§ 9. Составьте систему уравнений, описывающих свободное поле. Обдумайте характер связи между векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$, «механизм» распространения волны. Укажите особенности плоской волны, монохроматической. Запишите разложение произвольной плоской волны на гармоники. Что должно быть задано, чтобы разложение выражало конкретную волну? Разберите содержание примера 9.1. Что такое волновой пакет? Каково соотношение между реальными волнами и их моделями: пакетом, гармоникой? Оцените значение соотношения (9.19) для практики передачи информации с помощью электромагнитных волн. Обсудите вопросы поляризации волн в связи с общим решением волнового уравнения.

§ 10. Продумайте приближения, применяемые при выводе формул для излучения системы. Как связаны электромагнитные волны с зарядами? Проанализируйте поле излучения диполя. Обсудите роль зависимости интенсивности излучения от частоты. При каком движении точечный заряд излучает? От чего зависит спектральный состав излучения некоторой системы зарядов? Решите задачи 1–5 к данной главе.

§ 11. Поясните природу рассеяния электромагнитных волн веществом. В связи с этим поясните также явления отражения и преломления света. Подробно разберитесь в понятии сечения рассеяния. Как можно интерпретировать полное сечение рассеяния геометрически? Решите задачу 6 из упражнений.

Упражнения

1. Найти средние по времени значения параметров излучения гармонического осциллятора (см. пример 10.2). Усреднение производится с помощью формулы

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

где T — период колебания.

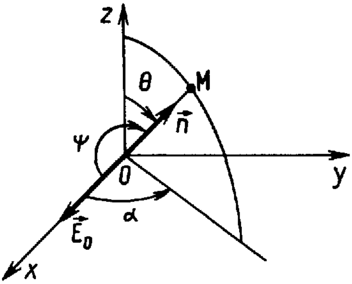
Ответ: $\bar{E} = \dfrac{fp_0 \sin\vartheta\, \omega^2}{\sqrt{2}r}$, $\quad \bar{B} = \dfrac{fp_0 \sin\vartheta\, \omega^2}{\sqrt{2}cr}$,

$$\bar{\sigma} = \frac{fp_0^2\,\omega^4 \sin^2\vartheta}{8\pi c r^2}, \qquad \bar{N} = \frac{fp_0^2\,\omega^4}{3c}.$$

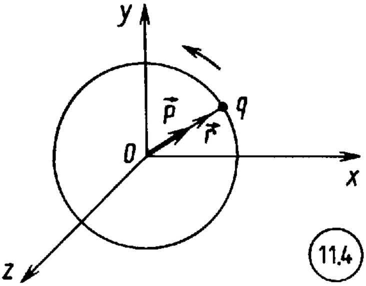
2. Проанализировать излучение точечного макроскопического заряда с заданным движением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в дипольном приближении при нерелятивистских скоростях.

Для участка траектории, малого по сравнению с расстоянием до точки наблюдения (см. рис. 10.3), возможно введение дипольного электрического момента заряда

$$\vec{p} = q\vec{r}(t).$$



11.3



11.4

В таком случае можно воспользоваться формулами (10.11), (10.12), (10.14), (10.15):

$$\vec B = \frac{fq}{cr}\left[\vec a\left(t - \frac{r}{c}\right)\cdot \vec n\right],$$

$$\vec E = \frac{f}{r}\left[\left[\vec a\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec n\right]\cdot \vec n\right],$$

где $\vec a = \ddot{\vec r}$ — ускорение заряда. Получаем

$$\sigma = \frac{fqa^2}{4\pi c r^2}\sin^2\vartheta;$$

полная мощность излучения равна: $N = \dfrac{2fq^2a^2}{3c}$.

3. Определить мощность излучения заряда, движущегося в постоянном однородном магнитном поле.

Как показано в [1], ч. II, заряд движется по окружности, причем при нерелятивистских скоростях выполняется соотношение

$$\frac{mv^2}{r} = qvB.$$

Ускорение постоянно по величине и равно a:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{qvB}{m}.$$

Используя результат предыдущей задачи, имеем $N = \dfrac{2fq^4v^2B^2}{3cm^2}$.

Излучение более интенсивно для легких частиц, что приводит к невозможности разгона электронов до очень высоких скоростей в циклических условиях: сообщаемая разгоняющим полем электрону энергия при некоторой его скорости вся идет на излучение. Однако само это так называемое циклотронное излучение находит применение на практике.

4. Рассчитать излучение электрического ротатора (заряд q, обращающий с частотой ω по окружности радиусом b) на большом расстоянии от ротатора (рис. 11.4).

Радиус-вектор заряда изменяется по закону

$$\vec{r} = \vec{i}b\cos\omega t + \vec{j}b\sin\omega t,$$

соответственно дипольный момент системы — по закону

$$\vec{p} = \vec{i}bq\cos\omega t + \vec{j}bq\sin\omega t.$$

Система сводится к двум скрещенным осцилляторам, а поле находится как суперпозиция их полей. Для волны, идущей от первого осциллятора по оси Oz, имеем

$$\vec{B}_1 = -[\vec{i}\,\vec{k}]\frac{1}{z}B_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) = \vec{j}\frac{1}{z}B_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right),$$

$$\vec{E}_1 = [\vec{j}\,\vec{k}]\frac{c}{z}B_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) = \vec{i}\frac{1}{z}E_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right),$$

где

$$B_0 = \frac{fqb\omega^2}{c}, \quad E_0 = fqb\omega^2.$$

Соответственно для второго осциллятора

$$\vec{B}_2 = -\vec{i}\frac{1}{z}B_0\sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right), \quad \vec{E}_2 = \vec{j}\frac{E_0}{z}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right).$$

5. Показать, что излучение ротатора в направлении оси Oz поляризовано по кругу.

Составляющие поля по осям Ox и Oy сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$:

$$E_x = \frac{1}{z}E_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right),$$

$$E_y = \frac{1}{z}E_0\sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right),$$

что и дает круговую поляризацию.

6. Пучок электромагнитных волн с сечением $A = 10^{-6}$ м^2 и плотностью потока энергии $\sigma_{\text{пад}} = 10\,\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$ падает на слой электронного газа толщиной $d = 10^{-6}$ м, в котором концентрация электронов составляет $n = 10^{12}\,\frac{1}{\text{м}^3}$. Определить рассеиваемую мощность.

Решение: Для отдельного электрона

$$\sum\nolimits_0 = \frac{N_0}{\sigma_{\text{пад}}}, \text{ где } \sum\nolimits_0 = \frac{8\pi}{3}r_0^2$$

и

$$r_0 = 2{,}8\cdot 10^{-15} \text{ м}.$$

Остается просуммировать поток энергии от всех электронов:

$$N = N_0 A d n = 6{,}7 \cdot 10^{-24} \text{ Вт}.$$

Глава IV
РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Электромагнитное поле по своей природе является предельно релятивистским объектом: оно распространяется в пространстве со скоростью света. Уравнения поля ковариантны по отношению к преобразованиям Лоренца, т. е. сохраняют одну и ту же форму написания во всех инерциальных системах отсчета. Это обстоятельство не является очевидным, ибо уравнения Максвелла обычно используются в трехмерной форме, тогда как для ковариантной записи им следует придать четырехмерную форму.

Вышеизложенный материал не требовал анализа релятивистских особенностей уравнений поля, релятивистской природы законов электромагнетизма. Однако эти вопросы имеют принципиальное значение, и для них отводится специальная тема курса. При изучении данной темы требуется знание основ СТО; соответствующий материал изложен в главе I части II курса теоретической физики (см. [1]).

§ 12. Релятивистская ковариантность уравнений электродинамики

12.1. Четырехмерный вектор плотности тока. Четырехмерная форма закона сохранения заряда. Основные уравнения электромагнитного поля, их решения и следствия справедливы в инерциальных системах отсчета. Релятивистский характер электромагнитных явлений формально отражается в ковариантности основных законов электродинамики и в определенных трансформационных свойствах электромагнитных величин по отношению к преобразованиям Лоренца. Запишем преобразования в виде:

$$x'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\alpha\beta} x_\beta, \quad \alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{12.1}$$

где $\Lambda_{\alpha\beta}$ — элементы матрицы преобразований Лоренца: