$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\cos\vartheta' + \frac{V}{c}} \qquad (5)$$

Общая формула (5) для аберрации света найдена

Пусть свет испускается перпендикулярно направлению движения, т е $\vartheta' = 270°$ (см рис 13 2), тогда

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{c}{V}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \qquad (6)$$

Из рисунка видно, что $-\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{ctg}\beta$, т е

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{V}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (7)$$

Это и есть релятивистская формула аберрации, соответствующая рассмотренной в начале примера классической формуле (1)

В общем случае произвольного угла ϑ' аберрация определяется разностью углов ϑ и ϑ'

Методические указания и рекомендации

I. Важная в мировоззренческом плане тема изложена в главе с помощью аппарата тензорного исчисления в пространстве Минковского. При этом применен наиболее простой вариант для выражения метрики: использована мнимая единица у временной проекции векторов. Основа главы — преобразования поля при переходе от одной системы к другой. Все остальное имеет иллюстративный характер.

По данной главе может быть организована самостоятельная работа. Это в основном применение формулы преобразования 4-векторов, использование инвариантов в конкретных задачах.

II. При изучении главы контролируйте усвоение материала с помощью вопросов, углубляйте понимание его в упражнениях.

§ 12. Повторите основы СТО по книге [1], ч. II. На чем основана четырехмерная интерпретация преобразований Лоренца? В чем отличие пространства-времени от евклидового пространства? Какие величины являются инвариантами при переходе от одной ИСО к другой? Приведите примеры 4-векторов из релятивистской динамики. Продумайте, что означает инвариантность электрического заряда. Докажите инвариантность 4-оператора Даламбера, векторный характер ∇_α. Докажите, что четыре величины $\frac{i}{c}\varphi$, A_x, A_y, A_z образуют 4-вектор. Исходя из формул (12.4) найдите формулы преобразования плотностей заряда и тока. Выведите формулы преобразований потенциалов поля. Почему скалярный и векторный потенциалы объединяются в одну величину? Повторите определение и свойства тензорных величин. Докажите, что совокупность величин (13.1) образует тензор преобразований Лоренца. Разбейте все величины, встречающиеся в § 12 и § 13, на скаляры, векторы, тензоры. Решите задачи 1–12 из упражнений к главе. Перечислите известные вам применения эффекта Доплера. Обсудите применение явления аберрации света в астрономии.

Упражнения

1. Пользуясь определениями тензора поля (13.1), 4-потенциала A_α (12.12) и формулами $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$, $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, получить все элементы тензора $F_{\alpha\beta}$.

2. Вывести закон преобразования проекций вектров $\vec{E}$ и $\vec{B}$ с помощью формул (12.4) и (13.2).

3. Доказать эквивалентность ковариантной системы уравнений (13.3), (13.4) и системы уравнений Максвелла (2.1), используя компоненты тензора поля, заданные через проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и выполняя указанные в уравнениях действия.

4. Пользуясь инвариантами поля (13.7), (13.8), доказать, что перпендикулярность векторов поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и отношение их модулей в электромагнитной волне сохраняются во всех ИСО.

5. Показать с помощью инвариантов $Inv^{(1)}$ и $Inv^{(2)}$, что перпендикулярность векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ сохраняется во всех ИСО только при условии сохранения определенного отношения их модулей.

6. Показать, что во всех ИСО имеется постоянное отношение $|\vec{E}|$ и $|\vec{B}|$ только при условии перпендикулярности векторов.

7. Выполнить непосредственную проверку инвариантности величин $Inv^{(1)}$ и $Inv^{(2)}$ с помощью преобразований Лоренца.

8. Найти закон преобразования векторов поля при $V \ll c$ и записать его в векторной форме.

Ответ: $\vec{E}\,' = \vec{E} + [\vec{V}\vec{B}]$, $\vec{B}\,' = \vec{B}$.

9. С помощью результата предыдущей задачи показать, что для случая $E = 0$, а $B \neq 0$ векторы $\vec{E}\,'$ и $\vec{B}\,'$ перпендикулярны.

10. Показать, что в случае $Inv^{(2)} > 0$ и $Inv^{(1)} = 0$ найдется система отсчета, в которой имеет место только магнитное поле, а при $Inv^{(2)} < 0$ и $Inv^{(1)} = 0$ – только электрическое.

11. Как должны соотноситься между собой векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$, чтобы электрическое или магнитное поле нельзя было исключить никаким выбором системы отсчета?

12. Точечный заряд движется равномерно со скоростью $\vec{v}$. Найти потенциалы и векторы поля при $v \ll c$.

Ответ: $\varphi(\vec{r}) = k\frac{q}{R}$, $\vec{A} = f\frac{q\vec{v}}{R}$, $\vec{E} = kq\frac{\vec{R}}{R^3}$, $\vec{B} = \frac{1}{c^2}[\vec{v}\,\vec{E}]$,

где $\vec{R}$ – вектор, проведенный из точки, где находится заряд, в точку, где измеряются характеристики поля: $R = \sqrt{(x - vt)^2 + y^2 + z^2}$.